

Bài I: (2,0 điểm).

Cho hai biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $Q = \frac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị biểu thức Q khi $x = 16$.

2) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \leq Q$.

Bài II: (2,0 điểm).

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?

2) Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III: (2,5 điểm).

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{2} = 4 \\ \frac{4}{x} - 3\sqrt{y-2} = -2 \end{cases}$$

2) Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = (3-2m)x - 4$.

a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$.

Bài IV: (3,0 điểm).

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho $MC < MD$ và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO . Gọi E là trung điểm của CD .

1) Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.

2) Kẻ AB cắt MD tại I , cắt MO tại H . Chứng minh $EA \cdot EB = EI \cdot EM$ và $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$.

3) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA , cắt AE tại K . Chứng minh $IK \parallel AC$.

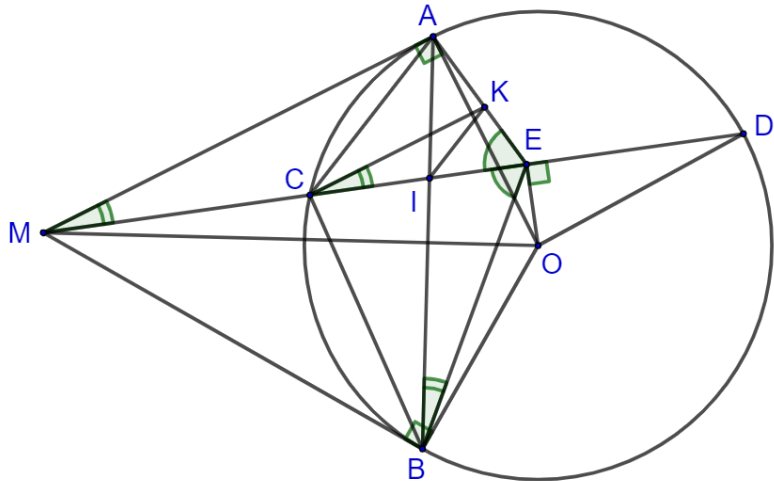
Bài V: (0,5 điểm).

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+2} + \frac{3}{b+4} \leq \frac{c+1}{c+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = (a+1)(b+1)(c+1)$.

Bài	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
I	1	Tính giá trị biểu thức Q khi $x = 16$.	0,5đ
		Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức Q ta được: $Q = \frac{7\sqrt{16} - 2}{16 + 2\sqrt{16}}$	0,25đ
		$Q = \frac{7.4 - 2}{16 + 2.4} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}.$ Vậy $Q = \frac{13}{12}$ khi $x = 16$.	0,25đ
	2	Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.	1đ
		$P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ $P = \left[\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25đ
		$P = \left[\frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25đ
		$P = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25đ
		Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ (điều phải chứng minh).	0,25đ
	3	Tìm tất cả các giá trị của x để $P \leq Q$.	0,5đ
		Để $P \leq Q$ thì $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \leq \frac{7\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}}$ $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{7\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \leq 0$ Mà $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) > 0$ (với $x > 0, x \neq 1$) $\Rightarrow (\sqrt{x}-2)^2 \leq 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ). Vậy $x = 4$ là giá trị cần tìm.	0,25đ

II	1	Phát động thi đua chào mừng 20 năm ngày thành lập quận Long Biên, hai phường Ngọc Thụy và Phúc Đồng tham gia lắp đặt camera để đảm bảo an ninh đô thị. Trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera. Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên cả hai phường đã lắp được 200 chiếc. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi phường lắp được bao nhiêu chiếc camera?	1,5đ
		Gọi số camera phường Ngọc Thụy và phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ nhất lần lượt là x (chiếc) và y (chiếc) (ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x < 900$; $y < 900$).	0,25đ
		Do trong tháng thứ nhất, cả hai phường đã lắp được 180 chiếc camera nên ta có phương trình: $x + y = 180$ (1)	0,25đ
		Sang tháng thứ hai, phường Ngọc Thụy vượt mức 10%, phường Phúc Đồng vượt mức 12% so với tháng thứ nhất nên: Số camera phường Ngọc Thụy lắp được trong tháng thứ hai là: $x + 10\%x = 1,1x$ (chiếc). Số camera phường Phúc Đồng lắp được trong tháng thứ hai là $y + 12\%y = 1,12y$ (chiếc)	0,25đ
		Do tháng thứ hai cả hai phường lắp được 200 chiếc nên ta có phương trình: $1,1x + 1,12y = 200$ (2)	0,25đ
		Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 180 \\ 1,1x + 1,12y = 200 \end{cases}$	0,25đ
		Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 80 \\ y = 100 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy trong tháng thứ nhất, phường Ngọc Thụy lắp được 80 chiếc camera, phường Phúc Đồng lắp được 100 chiếc camera.	0,25đ
	2	Một hộp sữa đặc có dạng một hình trụ với đường kính đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Tính thể tích của hộp sữa đó. (Lấy $\pi \approx 3,14$).	0,5đ
		Bán kính đáy hộp sữa là: $R = \frac{6}{2} = 3$ (cm)	
		Thể tích hộp sữa đó là: $V = \pi R^2 h \approx 3,14.3^2.9 = 254,34$ (cm ³).	0,25đ
III	1	Vậy thể tích của hộp sữa đó khoảng 254,34 cm ³ .	0,25đ
		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{2} = 4 \\ \frac{4}{x} - 3\sqrt{y-2} = -2 \end{cases}$	1đ
		ĐKXĐ: $x \neq 0$; $y \geq 2$.	0,25đ
		Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \sqrt{y-2} = b \end{cases},$	
		ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3a + \frac{b}{2} = 4 \\ 4a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a + 3b = 24 \\ 4a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$	0,25đ

		$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \sqrt{y-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$	0,25đ
		Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 6)$.	0,25đ
	2	a) Chứng minh rằng (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt.	0,5đ
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $-x^2 = (3-2m)x - 4 \Leftrightarrow x^2 + (3-2m)x - 4 = 0 \quad (I)$ Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (2m-3)^2 + 16 > 0$ với mọi m (do $(2m-3)^2 \geq 0$ với mọi m) $\Rightarrow$ Phương trình (I) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Vậy (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.	0,25đ
		b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai giao điểm của (P) và (d). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$.	1đ
		Xét PT hoành độ giao điểm: $x^2 + (3-2m)x - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-3 & (1) \\ x_1 x_2 = -4 & (2) \end{cases}$	0,25đ
		Theo bài ra, ta có: $K = (1-x_1^2)(1-x_2^2) - 2x_1 - 2x_2$ $K = 1 - (x_1^2 + x_2^2) + (x_1 x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)$ $K = 1 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) \quad (3)$	0,25đ
		Thay (1), (2) vào (3), ta có: $K = 1 - (2m-3)^2 + 2 \cdot (-4) + (-4)^2 - 2 \cdot (2m-3)$ $K = -4m^2 + 8m + 6$ $K = -(2m-2)^2 + 10 \leq 10 \text{ do } (2m-2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m.$	0,25đ
		Vậy giá trị lớn nhất của K là $10 \Leftrightarrow (2m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.	0,25đ
IV			0,25đ

1	Chứng minh tứ giác $MEOB$ nội tiếp.	0,75đ
	Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến $\Rightarrow MA \perp OA, MB \perp OB$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^\circ$.	0,25đ
	Xét (O) có: E là trung điểm của dây $CD \Rightarrow OE \perp CD$ (định lý) $\Rightarrow \widehat{MEO} = 90^\circ$.	0,25đ
	Ta có: $\widehat{MEO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $MEOB$ nội tiếp.	0,25đ
	2 Chứng minh $EA.EB = EI.EM$ và $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$.	1,5đ
	Ta có: $\widehat{MAO} = \widehat{MEO} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $MAEO$ nội tiếp Mà tứ giác $MEOB$ nội tiếp (chứng minh trên) $\Rightarrow$ Năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính OM Xét (O) có: MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $M \Rightarrow MA = MB$ (tính chất) Xét đường tròn đường kính OM có: $MA = MB \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MB}$ $\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{BEM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)	0,25đ
	và $\widehat{EMA} = \widehat{EBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).	0,25đ
	Suy ra $\triangle EAM \sim \triangle EIB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EA}{EI} = \frac{EM}{EB} \Rightarrow EA.EB = EI.EM$ (điều phải chứng minh).	0,25đ
	Ta có $AB \perp OM$ tại H (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Xét $\triangle OAM$ vuông tại A , đường cao AH có: $MH.MO = MA^2$ (hệ thức lượng) (3) Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có: $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}$ và $\widehat{AMC}$ chung $\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MC.MD = MA^2$ (4) Từ (3), (4) $\Rightarrow MH.MO = MC.MD \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$. Xét $\triangle MCH$ và $\triangle MOD$ có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$ và $\widehat{HMC}$ chung $\Rightarrow \triangle MCH \sim \triangle MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$	0,25đ
	Xét $\triangle OCD$ có: $OC = OD$ (bán kính) $\Rightarrow \triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{OCE}$.	0,25đ
	Vậy $\widehat{MHC} = \widehat{OCE}$ (điều phải chứng minh).	0,25đ
3	Chứng minh $IK \parallel AC$.	0,5đ
		

	Do $CK \parallel MA \Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EMA}$ (đồng vị) Mà $\widehat{EMA} = \widehat{EBI}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EBI}$. Xét $\triangle EKC$ và $\triangle EIB$ có: $\widehat{ECK} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{KEC} = \widehat{IEB}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle EKC \sim \triangle EIB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{CK}{BI}$ (5)	0,25đ
	Ta có: $\widehat{EKC} = \widehat{EIB}$ (do $\triangle EKC \sim \triangle EIB$) và $\widehat{EKC} + \widehat{AKC} = 180^\circ$; $\widehat{EIB} + \widehat{CIB} = 180^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{CIB}$. Lại có: $\widehat{ACK} = \widehat{CAM}$ (do $CK \parallel MA$); $\widehat{CAM} = \widehat{CBI} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}$ $\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{CBI}$. Suy ra $\triangle ACK \sim \triangle CBI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CK}{BI} = \frac{AK}{CI}$ (6) Từ (5), (6) $\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{AK}{CI} \Rightarrow \frac{EK}{AK} = \frac{EI}{CI} \Rightarrow IK \parallel AC$ (định lí Ta-lét đảo).	0,25đ
V	Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+2} + \frac{3}{b+4} \leq \frac{c+1}{c+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = (a+1)(b+1)(c+1)$.	0,5đ
	* Xét bất đẳng thức: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (*) với $x \geq 0, y \geq 0$ (Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$). * Ta có: $\frac{1}{a+2} + \frac{3}{b+4} \leq \frac{c+1}{c+3} \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{3}{b+4} + \frac{2}{c+3} \leq 1$ (1) Áp dụng (1) và (*), ta có: $\frac{a+1}{a+2} = 1 - \frac{1}{a+2} \geq \frac{3}{b+4} + \frac{2}{c+3} \geq 2\sqrt{\frac{6}{(b+4)(c+3)}}$ $\frac{b+1}{b+4} = 1 - \frac{3}{b+4} \geq \frac{1}{a+2} + \frac{2}{c+3} \geq 2\sqrt{\frac{2}{(a+2)(c+3)}}$ $\frac{c+1}{c+3} = 1 - \frac{2}{c+3} \geq \frac{1}{a+2} + \frac{3}{b+4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{(a+2)(b+4)}}$	0,25đ
	* Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a+2)(b+4)(c+3)} \geq 8 \cdot \frac{6}{(a+2)(b+4)(c+3)}$ $\Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) \geq 48$ Vậy $\min(Q) = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{3}{b+4} = \frac{2}{c+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}$	0,25đ

Lưu ý:

- Tổ giám khảo thống nhất để chia nhỏ điểm thành phần nhưng không được thay đổi tổng điểm.
- Học sinh làm cách khác mà vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa.