

Bài I. (2,0 điểm) Cho các biểu thức

$$A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{và} \quad B = \frac{x + 8\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0, x \neq 4$$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Cho $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn: $P.x = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 1)$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai vòi cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu để vòi I chảy một mình trong 10 phút rồi khóa lại và mở tiếp vòi II chảy trong 12 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

2) Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 40cm, độ dài đường sinh là 30cm. Người ta lát mặt xung quanh hình nón bằng 3 lớp lá khô. Tính diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón như thế (lấy $\pi \approx 3,14$)

Bài III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - 1)(y + 3) = xy + 22 \\ (x - 2)(y + 1) = xy + 8 \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 3 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{21}$.

Bài IV. (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kỳ thuộc đoạn thẳng OA (M khác O và A). Tia DM cắt đường tròn (O) tại N.

1) Chứng minh bốn điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

3) Đường tròn tâm M bán kính MC cắt AC, CB lần lượt tại E và F. Chứng minh ba điểm E,

M, F thẳng hàng. Tìm vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OA để $S = \frac{4}{CE} + \frac{1}{CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

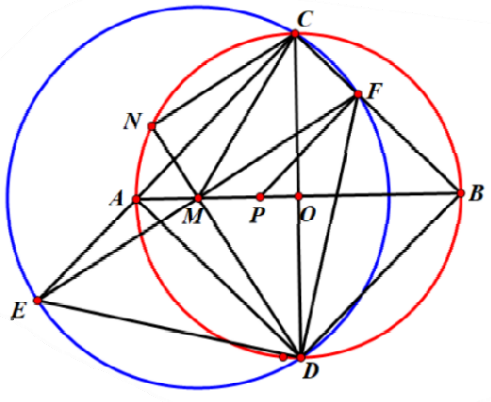
Bài V. (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + bc - 2ca$.

----- Hết -----

Bài	Nội dung	Điểm
I		2,0
1	$A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$	0,5
	Thay $x = 16$ (tmđk): $A(x) = \frac{2 + \sqrt{16}}{\sqrt{16}}$	0,25
	$A = \frac{3}{2}$	0,25
2	$B = \frac{x + 8\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x}}$	1,0
	$B = \frac{x + 8\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ $B = \frac{x + 8\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$	0,5
	$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$	0,5
3		0,5
	$P = A : B = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{x - 4}{x}$ $P.x = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow x - 4 = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 5 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 5) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 5 = 0 \quad (\sqrt{x} + 1 > 0)$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{25}{4} \quad (\text{tmđk})$	0,25
II		2,5
1		2,0
	Gọi thời gian vòi I, II lần lượt chảy một mình đầy bể là x, y (giờ), $(x, y > \frac{4}{3})$	0,25
	Trong 1 giờ, vòi I chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể), vòi I chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể) Cả hai vòi chảy được: $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$ (bể)	0,25

	Cả hai vòi cùng chảy sau 1 giờ 20 phút đầy bể, ta có PT: $(1h20' = \frac{4}{3}(h))$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$	0,25
	Sau 10 phút $\left(= \frac{1}{6}h \right)$, vòi I chảy được: $\frac{1}{6x}$ (bể) Sau 12 phút $\left(= \frac{1}{5}h \right)$, vòi II chảy được: $\frac{1}{5y}$ (bể) Hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$ bể, ta có PT: $\frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15}$	0,5
	Ta có HPT: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}$	0,25
	Giải hệ PT được: $x = 2$ (tmdk); $y = 4$ (tmdk) và KL	0,5
2		0,5
	$R = 20\text{cm}$ $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 20 \cdot 30 \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25
	Diện tích lá cần dùng là: $3 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 30 \approx 3,14 \cdot 1800 = 5652 \text{ (cm}^2\text{)}$ Vậy diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón khoảng $5652 \text{ (cm}^2\text{)}$	0,25
III		2,0
1	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y+3) = xy + 22 \\ (x-2)(y+1) = xy + 8 \end{cases}$	1,0
	Biến đổi thành $\begin{cases} 3x - y = 25 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$	0,5
	Giải được: $\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$ và KL	0,5
2	Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 3 = 0$	1,0
a		0,5
	Thay $m = -3$ ta được: $x^2 + 3x - 6 = 0$	0,25
	Giải PT được nghiệm: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$; $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$	0,25
b	Tìm m để phương trình có 2 nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{21}$	0,5
	$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{21})^2 \end{cases}$	0,25

	$\Delta' = (m-2)^2 + 8 > 0 \forall m$ HT Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$	
	$x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{21})^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 21$ $\Leftrightarrow m^2 - 2(m-3) = 21 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$ Giải $m = 5$ (tm) và $m = -3$ (ko tm) Kết hợp... $m = 5$	0,25
IV		3,0
1	Chứng minh bốn điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.	1,0
	Vẽ hình đúng đến câu 1) Ta có $AB \perp CD$ tại O (gt) $\Rightarrow \widehat{MOC} = 90^\circ$ $\widehat{DNC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{MNC} = 90^\circ$	0,5
	Tứ giác OMNC có $\widehat{MNC} + \widehat{MOC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\widehat{MNC}$ và $\widehat{MOC}$ là hai góc đối nhau Suy ra tứ giác OMNC nội tiếp (dnhb) Vậy 4 điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn	0,5
2	Chứng minh $DM \cdot DN = DO \cdot DC = 2R^2$	1,0
	Chứng minh: $\triangle NDC \sim \triangle ODM$ (g.g)	0,5
	$\frac{DN}{DO} = \frac{DC}{DM} \Rightarrow DM \cdot DN = DO \cdot DC = R \cdot 2R = 2R^2$	0,5
3		1,0
	+) Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng hàng $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $\widehat{ECF} = 90^\circ$ Mà $\widehat{ECF}$ là góc nội tiếp chắn cung EF của (M, MC) Suy ra EF là đường kính của đường tròn tâm M. $\Rightarrow$ Ba điểm E, M, F thẳng hàng.	0,5
	+) Chứng minh $CE + CF$ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OA. C/m: $\triangle ADE = \triangle BDF$ (g.c.g) ($AD = BD$; $\widehat{ADE} = \widehat{FDB}$ (cùng phụ với góc ADF)) Suy ra $AE = BF$ Mà $CE + CF = (CA + AE) + (BC - BF) = CA + BC + AE - BF = 2AC$	0,25

	Tính được $AC = R\sqrt{2}$ Suy ra $CE+CF=2R\sqrt{2}$ Vậy $CE+CF$ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OA.	
	+) <i>Tìm vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OA để $S = \frac{4}{CE} + \frac{1}{CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất</i> Ta có $S = \frac{4}{CE} + \frac{1}{CF} \geq \frac{9}{CE+CF} = \frac{9}{2\sqrt{2}R}$ S nhỏ nhất $= \frac{9}{2\sqrt{2}R} \Leftrightarrow \frac{2}{CE} = \frac{1}{CF} \Leftrightarrow CE = 2CF$ $\Leftrightarrow CA + AE = 2BC - 2BF \Leftrightarrow BC = 3.BF$ Kẻ $FP//EC$ (P thuộc AB), $\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow BP = \frac{1}{3}BA$ Mà $\triangle AEM = \triangle PEM$ ($g.c.g$) $\Rightarrow AM = MP \Rightarrow BP = MP = AM = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}R$ Vậy M thuộc AO sao cho $AM = \frac{2}{3}AO$.	0,25
V	Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + bc - 2ca$	0,5
	Từ $a + b + c = 2 \Rightarrow a + c = 2 - b$ mà $\begin{cases} a + c \geq 2\sqrt{ac} \\ 2 - b \leq 2 \text{ (do } b \geq 0) \end{cases} \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{ac} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq ac \leq 1$ * $P = ab + bc - 2ca = b(a + c) - 2ac \geq 0.(a + c) - 2 \Rightarrow P \geq -2 \Rightarrow P_{\min} = -2 \Leftrightarrow a = c = 1, b = 0$	0,25
	* $P = ab + bc - 2ca = b(a + c) - 2ac \leq b(2 - b) \leq \frac{(b + 2 - b)^2}{4} = 1$ $\Rightarrow P \leq 1 \Rightarrow P_{\max} = 1 \Leftrightarrow b = 1, a = 0, c \geq 0$ hoặc $b = 1, c = 0, a \geq 0$	0,25