

Bài I (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$, $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- 2) Rút gọn B
- 3) Biết $P = A \cdot B$. Tìm giá trị lớn nhất của P

Bài II (2,5 điểm)

- 1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một phân xưởng theo kế hoạch phải sản xuất 1000 bộ đồ bảo hộ y tế phục vụ công tác phòng chống dịch bệnh trong một thời gian quy định. Nhưng do tình hình diễn biến dịch bệnh phức tạp, để đáp ứng nhu cầu đồ bảo hộ y tế, mỗi ngày phân xưởng đã sản xuất vượt mức 20 bộ đồ bảo hộ y tế nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 1 ngày và làm thêm được 80 bộ đồ bảo hộ y tế. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế?

- 2) Một hình cầu có thể tích bằng 288π (cm³). Tính diện tích của mặt cầu đó? (cho $\pi = 3,14$)

Bài III (2 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} - \frac{7}{y} = 2 \\ 5\sqrt{x-3} + \frac{7}{y} = 4 \end{cases}$$

- 2) Cho phương trình $x^2 + (2-m)x + 3(m-5) = 0$ với m là tham số.
 - a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm $x = 3$.
 - b) Tìm giá trị của m để phương trình trên có nghiệm $x = 3 + \sqrt{2}$.

Bài IV (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$, dây CD cố định. Lấy H là trung điểm của CD. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng AB cắt các đường thẳng MO, OH lần lượt tại K và N.

- 1) Chứng minh tứ giác MNHK nội tiếp.
- 2) Chứng minh $OH \cdot ON = OK \cdot OM$
- 3) Khi M di động trên tia đối của tia DC hãy chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.
- 4) Gọi P là giao điểm của AB và CD. Chứng minh $\frac{2}{MP} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}$

Bài V (0,5 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2020x + 2021\sqrt{1-x^2} + 2022}{\sqrt{1-x^2}}$

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN	ĐIỂM
1 (1,5đ)	1	Khi $x = 25$ (TMĐK) thì $A = \frac{\sqrt{25} + 3}{\sqrt{25} - 1} = 2$	0,25đ
	2	Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:	0,25đ
		$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	
		$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{7\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	
		$B = \frac{x+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3-7\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	
		$B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$	0,25đ
3	3	Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:	0,25đ
		$P = A.B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$	0,25đ
2 (2,5đ)	1	Do $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \max P = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	0,75đ
		Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$	
		Vậy GTLN của $P = \frac{3}{2}$ khi $x = 0$	
2 (2,5đ)	1	Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế mà phân xưởng sản xuất mỗi ngày theo kế hoạch là x ($x \in \mathbb{N}^*$, bộ)	0,25đ
		Số bộ đồ bảo hộ y tế phân xưởng sản xuất thực tế mỗi ngày là $x+20$ (bộ)	0,25đ
		Thời gian phân xưởng sản xuất đồ bảo hộ y tế theo kế hoạch $\frac{1000}{x}$ (ngày)	0,25đ
		Thời gian phân xưởng sản xuất đồ bảo hộ y tế thực tế là $\frac{1000+80}{x+20} = \frac{1080}{x+20}$ (ngày)	0,25đ
		Vì phân xưởng đã hoàn thành sớm hơn thời gian quy định là 1 ngày. Ta có phương trình:	0,25đ
		$\frac{1000}{x} - \frac{1080}{x+20} = 1$	
2	1	Giải phương trình tìm được $x = 100$ (tmđk)	0,25đ
		Vậy số bộ đồ bảo hộ y tế phân xưởng sản xuất mỗi ngày theo kế hoạch là 100 bộ.	

	2	Theo đề bài ta có: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi \Rightarrow R = 6$ (cm)	0,25đ
		Diện tích của mặt cầu đó là: $S = 4\pi R^2 = 4.3,14.6^2 = 452,16$ (cm ²).	0,25đ
3 (2đ)	1	$\begin{cases} \sqrt{x-3} - \frac{7}{y} = 2 \\ 5\sqrt{x-3} + \frac{7}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{ĐKXD: } x \geq 3; y \neq 0.$	0,25đ
		Đặt $a = \sqrt{x-3}$ ($a \geq 0$) và $\frac{1}{y} = b$ ($b \neq 0$), ta có hệ phương trình	0,25đ
		$\begin{cases} a - 7b = 2 \\ 5a + 7b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (t/m)} \\ b = -\frac{1}{7} \text{ (t/m)} \end{cases}.$	0,25đ
		Do đó $\begin{cases} \sqrt{x-3} = 1 \\ \frac{1}{y} = -\frac{1}{7} \end{cases}$. Ta tìm được $\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 \end{cases}$ (thỏa mãn).	0,25đ
		Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; -7)$.	0,25đ
	2	a) Thay $x=3$ vào vế trái của phương trình ta được: $3^2 + (2-m).3 + 3(m-5) = 9 + 6 - 3m + 3m - 15 = 0$ đúng với mọi m Vậy phương trình có nghiệm $x=3$ với mọi m .	0,25đ
		b) Vì phương trình luôn có nghiệm $x=3$ nên để phương trình có nghiệm $x=3+\sqrt{2}$ thì theo định lý Vi-et ta có: $3(3+\sqrt{2}) = 3(m-5) \Leftrightarrow 3+\sqrt{2} = m-5 \Leftrightarrow m = 8+\sqrt{2}$. Vậy $m = 8+\sqrt{2}$ thì phương trình trên có nghiệm $x=3+\sqrt{2}$	0,25đ
			0,25đ
4 (3,5đ)			0,25đ
	1	Vì H là trung điểm CD nên OH vuông góc CD, suy ra $\widehat{OHM} = \widehat{MHN} = 90^\circ$ (1)	0,25đ
		Vì $OA = OB = R$; $MA = MB$ (tc 2 tt cắt nhau) nên OM là đường trung trực AB, suy ra $\widehat{MKN} = 90^\circ$ (2).	0,25đ
		Từ (1)(2) lập luận suy ra tứ giác MNHK nội tiếp.	0,25đ
	2	$\widehat{ONK} = \widehat{OMH}$ (cùng phụ $\widehat{KON}$); $\widehat{OHM} = \widehat{OKN} = 90^\circ$	0,5đ

		nên $\triangle OKN \sim \triangle OHM$ (g.g) Suy ra $\frac{ON}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow ON.OH = OK.OM$	0,5đ
	3	Ta có: $OK.OM = OA^2 = R^2$ Vì CD cố định nên H cố định suy ra OH không đổi. Mà $ON = \frac{OK.OM}{OH} = \frac{R^2}{OH}$ không đổi nên N cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định N.	0,25đ 0,5đ
	4	$\frac{2}{MP} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}$ $\Leftrightarrow 2MC.MD = MP(MD+MC) \Leftrightarrow MC.MD = MP.MH$ (*) (Do $MC + MD = 2MH$) $\triangle MDA \sim \triangle MAC \Rightarrow MC.MD = MA^2$ (1) $\triangle MKP \sim \triangle MHO \Rightarrow MP.MH = MK.MO$ (2) Tam giác $\triangle OAM$ vuông tại A có đường cao AK $\Rightarrow MK.MO = MA^2$ (3) Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow MC.MD = MP.MH$ (**) Từ (*) và (**) $\Rightarrow đpcm$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
5 (0,5đ)		ĐK: $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ Ta có: $A = \frac{2020x + 2021\sqrt{1-x^2} + 2022}{\sqrt{1-x^2}} = 2021 + \frac{2021(1+x) + 1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\geq 2021 + \frac{2\sqrt{2021(1+x)(1-x)}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = 2021 + 2\sqrt{2021}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2021(1+x) = 1-x \Leftrightarrow 2021 + 2021x = 1-x \Leftrightarrow x = -\frac{2020}{2022}$ Vậy $\min A = 2021 + 2\sqrt{2021} \Leftrightarrow x = -\frac{2020}{2022}$	0,25đ 0,25đ

Lưu ý:

- Học sinh có cách làm khác đúng cho điểm tương đương.
- Điểm toàn bài làm tròn đến 0,5 điểm./.

----- Hết -----