

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Bài I (2 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$

2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

3) Cho $P = A.B$. Tìm x để $P \geq 1$.

Bài II (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Một ca nô chạy ngược dòng 30km, sau đó chạy xuôi dòng 32km cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 3km/h. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 20 phút.

2) Nón lá dùng để che nắng, mưa, làm quạt khi nóng. Ngày nay nón lá cũng được xem là món quà đặc biệt cho du khách khi đến thăm quan Việt Nam. Biết một chiếc nón lá dạng hình nón có đường sinh bằng 35cm, đường kính vành nón bằng 50cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó. (lấy $\pi \approx 3,14$)

Bài III (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \frac{3}{x-y} = 8 \\ 3\sqrt{x} - \frac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$$

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = -mx + 3$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1| - |x_2| = 2$ (với $x_1 > x_2$)

Bài IV (3 điểm)

Cho đường tròn (O; R) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O; R) cắt đường thẳng BC tại E. Kẻ OH vuông góc với BC tại H.

1) Chứng minh tứ giác OHDE nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh $ED^2 = EC.EB$

3) Từ C kẻ đường thẳng song song với OE, đường này cắt AD tại I.

a) Chứng minh $HI \parallel AB$.

b) Đường thẳng OE cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Gọi F là giao điểm thứ hai của DQ với đường tròn (O; R). Chứng minh ba điểm B, O, F thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Với các số thực không âm a, b thỏa mãn $a + b = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1+3a} + \sqrt{1+2022b}.$$

.....Hết.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

A. Hướng dẫn chung

- Nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.
- Trong mỗi bài, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các bước sau có liên quan không được điểm.
- Bài hình học bắt buộc phải vẽ đúng hình thì mới chấm điểm, nếu không có hình vẽ đúng ở phần nào thì giám khảo không cho điểm phần lời giải liên quan đến hình của phần đó.
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu, tính đến 0,25 điểm và không làm tròn.

B. Đáp án và thang điểm

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
I (2đ)	1 (0,5đ)	Thay $x = 4$ (TMĐK) vào A ta được: $A = \frac{2\sqrt{4}-3}{\sqrt{4}+3}$	0,25
		$A = \frac{2\sqrt{4}-3}{\sqrt{4}+3} = \frac{1}{5}$ Vậy với $x = 16$ thì $A = \frac{1}{5}$	0,25
	2 (1đ)	$B = \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$	0,5
		$B = \frac{2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	
		$B = \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	
		$B = \frac{2\sqrt{x}-6+x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
		$B = \frac{x+6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	
	3 (0,5đ)	$B = \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ Vậy	0,25
		với $x \geq 0; x \neq 9$ $P = A.B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3}$ $P \geq 1.$	0,25

		$\hat{U} \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - 1^3 \geq 0 \hat{U} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \geq 0$ $*TH1: \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = 0 \hat{U} x = 0(TM)$	
		$*TH2: \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} > 0 \hat{U} \sqrt{x}-3 > 0$ $\hat{U} x > 9$ $KH: x^3 \geq 0; x \geq 9$ $Vậy x = 0 \text{ hoặc } x > 9$	0,25
II (2,5đ)	1 (2đ)	Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) (x > 3)	0,25
		Vận tốc ca nô khi đi xuôi dòng là: x + 3 (km/h)	0,25
		Vận tốc ca nô khi đi ngược dòng là: x – 3 (km/h)	0,25
		Thời gian ca nô xuôi dòng là: $\frac{32}{x+3}$ (h)	0,25
		Thời gian ca nô ngược dòng là: $\frac{30}{x-3}$ (h)	0,25
		Vì thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian chạy ngược dòng là 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ nên ta có phương trình: $\frac{30}{x-3} - \frac{32}{x+3} = \frac{1}{3}$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{30.3(x+3) - 32.3(x-3)}{3(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{3(x+3)(x-3)}$ $\Rightarrow 90x + 270 - 96x + 288 = x^2 - 9$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x - 567 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (x-21)(x+27) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-21=0 \\ x+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=21(TM) \\ x=-27(loại) \end{cases}$	0,25
		Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 21 (km/h)	0,25
	2 (0,5đ)	Bán kính đáy của hình nón là r = 50 : 2 = 25 (cm)	0,25
		Diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi rl = \pi.25.35 = 875\pi (cm^2)$	
		Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón nên diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón đó là: $875\pi.2 = 1750\pi \approx 5495 (cm^2)$	0,25
III (2đ)	1 (1đ)	$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \frac{3}{x-y} = 8 \\ 3\sqrt{x} - \frac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$	0,25
		ĐK: $x \neq y; x \geq 0$	
		Đặt $a = \sqrt{x}; b = \frac{1}{x-y}$ Ta được hệ pt $\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - 2b = -1 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ phương trình ta tìm được a = 1; b = 2	0,25

		Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 1(TM) \\ y = \frac{1}{2}(TM) \end{cases}$ Vậy hệ pt có một nghiệm duy nhất $\left(1; \frac{1}{2}\right)$	0,25
2 (1đ)	a	2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = -mx + 3$ và parabol (P): $y = x^2$. a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. b) Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1 - x_2 = 2$ (với $x_1 > x_2$) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 + mx - 3 = 0 \quad (*)$	0,25
		Ta có $\Delta = m^2 + 12 > 0$ với mọi m $\Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm trái dấu $\forall m$ $\Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$. $\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall m$.	0,25
		Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) Theo Vi – ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (1) \\ x_1 x_2 = -3 & (2) \end{cases}$ Do x_1, x_2 trái dấu mà $x_1 > x_2$ nên $x_1 > 0$ và $x_2 < 0$ Suy ra: $x_1 = x_1; x_2 = -x_2$ Theo đề bài: $x_1 - x_2 = 2$ Nên ta có: $x_1 + x_2 = 2$	0,25
		Từ đó suy ra: $-m = 2 \Rightarrow m = -2$ (thỏa mãn)	0,25
	b	Cách 2: Theo đề bài $ x_1 - x_2 = 2$ $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2 = 4$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2 x_1x_2 = 4$ $\Rightarrow (-m)^2 - 2(-3) + 2 -3 = 4$ $\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$ Thử lại: Với $m = 2$ không thỏa mãn Với $m = -2$ (thỏa mãn)	0,25

		Do $CI \parallel OE$ nên $ICH = OEH$ (hai góc đồng vị) Do tứ giác $OHDE$ nội tiếp nên $OEH = ODH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD) $\Rightarrow ICH = ODH$ hay $ICH = IDH$ nên tứ giác $ICDH$ nội tiếp đường tròn (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới 1 góc bằng nhau).	0,25
		Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ICDH$, có: $HID = HCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD) Hay $HID = BCD$ (1) Xét đường tròn $(O; R)$, có: $BAD = BCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) (2) Từ (1) và (2), ta có: $HID = BAD$. Mà chúng ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IH \parallel AB$	0,25
	b	Kéo dài CI cắt AB tại M. Xét $(O; R)$, có: $OH \perp BC$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm của BC Xét tam giác BMC, có: $IH \parallel MB$ (do $IH \parallel AB$ mà M thuộc AB) H là trung điểm của BC $\Rightarrow I$ là trung điểm của MC. Xét $\triangle AMI$, có: $PO \parallel MI \Rightarrow \frac{PO}{MI} = \frac{AO}{AI}$ (Hệ quả của định lý Talet) (3) Xét $\triangle AIC$, có: $OQ \parallel IC \Rightarrow \frac{OQ}{IC} = \frac{AO}{AI}$ (Hệ quả của định lý Talet) (4) Từ (3) và (4), suy ra: $\frac{PO}{MI} = \frac{OQ}{IC}$ Mà $MI = IC \Rightarrow PO = OQ$	0,25
		Xét tứ giác $APDQ$, có O là trung điểm của AD; O là trung điểm của PQ $\Rightarrow$ Tứ giác $APDQ$ là hình bình hành $\Rightarrow AP \parallel DQ$ hay $AB \parallel DF$ Xét $(O; R)$, có: $ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD) $\Rightarrow AB \perp BD$. Mà $DF \parallel AB$ $\Rightarrow BD \perp DF \Rightarrow BDF = 90^\circ$ Mà B, D, F thuộc đường tròn $(O; R)$ nên BF là đường kính của $(O; R)$ $\Rightarrow B, O, F$ thẳng hàng.	0,25
V (0,5đ)		Vì a, b không âm thỏa mãn $a + b = 1$ nên $0 \leq a \leq 1$ và $0 \leq b \leq 1$. Do đó: $a(a-1) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a \Leftrightarrow (1+a)^2 \leq 1+3a$. Tương tự: $b(b-1) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 \leq b \Leftrightarrow (1+b)^2 \leq 1+3b$. Mà $b \geq 0$ nên $2022b \geq 3b$, suy ra $1+2022b \geq 1+3b \geq (1+b)^2$.	0,25
		Do đó $P = \sqrt{1+3a} + \sqrt{1+2022b} \geq \sqrt{(1+a)^2} + \sqrt{(1+b)^2} = 2 + (a+b) = 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 1; b = 0$. Vậy $\min P = 3$ khi $a = 1; b = 0$.	0,25