

Câu 1(2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ \frac{y}{2} - 5 = -2x \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

với $x > 0$ và $x \neq 1$.

2) Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x + m^2 - 1$ (1), với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 1.

Câu 3(2,0 điểm)

1) Theo kế hoạch, một xưởng may phải may xong 280 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Đến khi thực hiện, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 5 bộ quần áo so với số bộ quần áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế, xưởng đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may xong bao nhiêu bộ quần áo?

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1) (m là tham số).

Tìm m nguyên dương để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa

mãn: $\frac{x_1^2 - 2x_1 - 3}{2} \cdot (x_2 - 1) + 5 = m^2$

Câu 4 (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại D, E. Gọi H là giao điểm của BD và CE; F là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp được đường tròn.

b) Gọi M là trung điểm của AH, K là giao điểm của AF và DE.

Chứng minh rằng: $\widehat{MDA} = \widehat{ODB}$ và $MD^2 = MK \cdot MF$

2) Từ một điểm E ở ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Gọi M là điểm nằm trên đoạn AB (M khác A và B, $MA \neq MB$). Gọi C và D là 2 điểm trên đường tròn sao cho M là trung điểm của CD. Các tiếp tuyến của đường tròn tại C và D cắt nhau tại F. Chứng minh rằng $\triangle OEF$ là tam giác vuông.

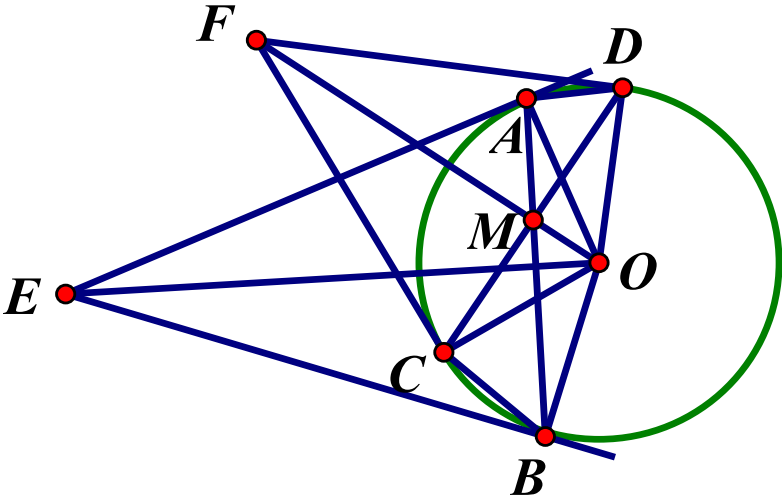
Câu 5 (1,0 điểm)

Cho ba số $a, b, c > 0$.

Chứng minh:
$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Thời gian làm bài: 120 phút
(Hướng dẫn chấm gồm có: 04 trang)

Câu	ý	Đáp án tóm tắt	Điểm
Câu 1 (2,0điểm)	1	$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ đặt $x^2 = y$ ($y \geq 0$) ta được phương trình $y^2 - 2y - 3 = 0$	0,25
		Ta có: $a - b + c = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$	0,25
		$y_1 = -1 < 0$ (loại); $y_2 = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$	0,25
		Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$	0,25
	2	$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ \frac{y}{2} - 5 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ -4y = -8 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
		Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$	0,25
Câu 2 (2,0điểm)	1	$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	0,25
		$A = \frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	0,25
		$A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	0,25
		$A = \frac{x+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$	0,25
	2	Để là hàm số bậc nhất thì $m \neq 1$ Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $1 \Rightarrow x = 1; y = 0$ thỏa mãn phương trình (1)	0,25
		Thay $x = 1; y = 0$ vào (1) ta được $0 = (m - 1).1 + m^2 - 1$ $\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$	0,25
		Giải phương trình ta được $m_1 = 1$ (loại); $m_2 = -2$ (thỏa mãn)	0,25
		Vậy với $m = -2$ thì đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hoành độ là 1	0,25

		$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$ Mà $\widehat{ADH}; \widehat{ADH}$ là hai góc đối của tứ giác ADHE	0,25
		Do đó tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH (Định lý)	0,25
		Vì $MA = MH$ (gt); ΔADH vuông tại D $\Rightarrow DM = \frac{1}{2} AH$ Hay $MD = MA = MH$ $\Rightarrow \Delta AMD$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAD}$ (1) Và ΔMDH cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MHD}$ (a)	0,25
		Mặt khác H là trực tâm ΔABC nên $AH \perp BC$ tại F Ta lại có $\widehat{MAD} = \widehat{DBO}$ (cùng Phụ với $\widehat{ACB}$) (2) $\widehat{DBO} = \widehat{ODB}$ (ΔOBD cân tại O) (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{ODB}$ (4)	0,25
		Từ (1) và (4) suy ra $\widehat{ODB} = \widehat{MAD}$ (b) Ta lại có ΔADH vuông tại D suy ra $\widehat{MAD} + \widehat{MHD} = 90^\circ$ (c) Từ (a), (b) và (c) suy ra $\widehat{MDH} + \widehat{ODB} = 90^\circ$. Suy ra MD là tiếp tuyến của (O)	0,25
	1b	Ta có $\widehat{HFC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$ nên tứ giác CDHF nội tiếp đường kính HC Suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{HCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD) $\widehat{HCD} = \widehat{KDM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung ED) $\Rightarrow \widehat{MFD} = \widehat{KDM}$ Xét ΔMDF và ΔMKD có: $\widehat{DMK}$ (chung) $\widehat{MFD} = \widehat{KDM}$ (cmt) Do đó ΔMDF và ΔMKD đồng dạng (g.g) Suy ra $\frac{MD}{MK} = \frac{MF}{MD} \Rightarrow MD^2 = MK.MF$	0,25
	2		
		- Chứng minh được: O, M, F thẳng hàng và $OM \perp CD$ tại M	0,25

Câu 5 (1,0điểm)		- Chứng minh được: $\Delta MAD \square \Delta MCB(g.g)$ $\Rightarrow MA. MB = MC. MD$ Mà M là trung điểm của CD $\Rightarrow MC = MD$ $\Rightarrow MA. MB = MC^2$ (1)	0,25
		Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OCF vuông tại C, $CM \perp OF$ (vì $OM \perp CD$ tại M - cmt) $\Rightarrow MO. MF = MC^2$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA. MB = MO. MF$ $\Rightarrow 4$ điểm O, A, B, F cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OFB}$	0,25
		Mặt khác, chứng minh được: O, A, B, E cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ 5 điểm O, A, B, E, F cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{OBE} = 90^\circ \Rightarrow$ ΔOEF vuông tại F	0,25
		Với x là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\sqrt{x^3+1} = \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq \frac{x+1+x^2-x+1}{2} = \frac{x^2+2}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3+1}} \geq \frac{2}{x^2+2}$ (*) Dấu “=” xảy ra khi x = 2	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2} = \frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}$ Suy ra: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{2a^2}{2(b^2+c^2)+2a^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ (1)	0,25
		Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ (2) $\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (3)	0,25
		Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$ Dấu “=” xảy ra khi a = b = c.	0,25

-----Hết-----