

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (2 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x-5}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{4}{1-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0$; $x \neq 1$)

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 36$.

2) Rút gọn biểu thức B

3) Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài II (2 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch, một xưởng phải sản xuất 280 chai nước rửa tay trong một thời gian quy định. Thực tế để đáp ứng nhu cầu của khách hàng trong mùa dịch COVID 19, mỗi giờ xưởng đó sản xuất thêm 5 chai so với kế hoạch nên không những hoàn thành công việc trước 2 giờ mà còn sản xuất được thêm 20 chai nước rửa tay nữa. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ xưởng đó phải sản xuất bao nhiêu chai nước rửa tay ?

2) Để hưởng ứng cuộc vận động giảm thiểu rác thải nhựa dùng một lần, một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng đồ ăn. Hộp giấy có dạng hình trụ, có đường kính đáy là 20cm, chiều cao 7cm và có nắp đậy. Tính diện tích giấy để sản xuất được 10 hộp giấy như trên, biết rằng diện tích giấy các mép dán vỏ hộp không đáng kể và cho $\pi \approx 3,14$.

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+2} + 2\sqrt{y-3} = 7 \\ \frac{2}{x+2} - 3\sqrt{y-3} = -7 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = 2mx - m^2 + m + 1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 3$.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn:

$$y_1 + y_2 + 2x_1 = 22 - 2x_2$$

Bài IV (3 điểm) Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA; MB tới đường tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d.

1) Chứng minh tứ giác OAMH nội tiếp.

2) Gọi giao điểm của AB với OH và OM lần lượt tại K và I.

Chứng minh: $OK \cdot OH = OI \cdot OM$.

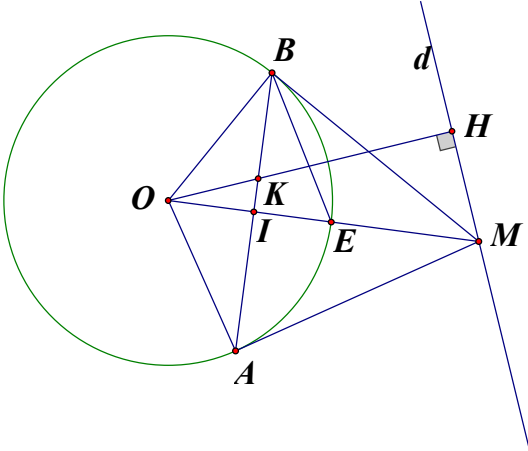
3) Đoạn thẳng OM cắt (O) tại E. Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB. Tìm vị trí điểm M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm) Giải phương trình $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
Bài I (2 điểm)	1) (0,5 đ)	Thay $x = 36$ (TM ĐKXD) vào biểu thức A	0,25
		Tính được $A = \frac{\sqrt{36} - 2}{\sqrt{36} - 1} = \frac{4}{5}$	0,25
	2) (1 đ)	$B = \frac{x-5}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{4}{1-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$ $B = \frac{x-5}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ $B = \frac{x-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{4(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$B = \frac{x-5-2\sqrt{x}+2+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $B = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$B = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	3) (0,5 đ)	$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ Để $\sqrt{P}$ tồn tại thì $P \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Rightarrow x \geq 4$	0,25
		Khi đó: $\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Rightarrow P < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}-1}{4(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-9}{4(\sqrt{x}+1)} < 0$ $\Rightarrow 3\sqrt{x}-9 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$ Kết hợp điều kiện ta được: $4 \leq x < 9$	0,25

Bài II (2 điểm)	1) (1,5 đ)	Gọi số chai nước rửa tay xường sản xuất được mỗi giờ theo kế hoạch là: x (đơn vị: chai; $x \in \mathbb{N}^*$) Số chai nước rửa tay xường sản xuất được mỗi giờ trong thực tế là: $x + 5$ (chai)	0,25
		Tổng số chai nước rửa tay xường sản xuất được trong thực tế là: $280 + 20 = 300$ (chai) Thời gian xường sản xuất 280 chai nước rửa tay theo kế hoạch là: $\frac{280}{x}$ (giờ)	0,25
		Thời gian xường sản xuất 300 chai nước rửa tay trong thực tế là: $\frac{300}{x + 5}$ (giờ)	
		Vì thực tế xường hoàn thành công việc trước kế hoạch 2 ngày nên ta có phương trình: $\frac{280}{x} - \frac{300}{x + 5} = 2$	0,25
		Giải phương trình được $x = 20$ hoặc $x = -35$	0,25
		Đối chiếu điều kiện và kết luận được theo kế hoạch mỗi giờ xường sản xuất được 20 chai nước rửa tay.	0,25
	2) (0,5 đ)	Bán kính đáy của hộp giấy hình trụ là: $20 : 2 = 10$ (cm) Diện tích giấy để sản xuất 1 hộp giấy là: $2\pi Rh + 2\pi R^2 \approx 2.3,14.10.7 + 2.3,14.10^2 \approx 1067,6$ (cm ²)	0,25
		Diện tích giấy để sản xuất 10 hộp giấy là: $1067,6 \cdot 10 = 10676$ (cm ²)	0,25
Bài III (2,5 điểm)	1) (1 đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x+2} + 2\sqrt{y-3} = 7 \\ \frac{2}{x+2} - 3\sqrt{y-3} = -7 \end{cases}$ ĐKXD: $x \neq -2$; $y \geq 3$ Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x+2} = a \\ \sqrt{y-3} = b \end{cases}$ ($a \neq 0$; $b \geq 0$). Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - 3b = -7 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ được: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ (TMĐK)	0,25
		$a = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$ (TMDK)	0,25
		$b = 3 \Rightarrow \sqrt{y-3} = 3 \Leftrightarrow y = 12$ (TMDK)	0,25

		Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (-1; 12)$	
	2a) (0,75 đ)	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = 2mx - m^2 + m + 1$ $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0 \quad (1)$ Với $m = 3$, phương trình (1) trở thành $x^2 - 6x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$ Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$ Với $x = 5 \Rightarrow y = 25$ Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 3$ là $(1; 1)$, $(5; 25)$	0,25 0,25 0,25
	2b) (0,75đ)	Xét pt hoành độ giao điểm: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0 \quad (1)$ $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - m - 1) = m + 1$ Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$ Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - m - 1$ Vì $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thuộc (P) nên: $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$ Ta có: $y_1 + y_2 + 2x_1 = 22 - 2x_2$ $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) = 22$ $\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 22$ Thay vào, ta được: $(2m)^2 - 2(m^2 - m - 1) + 2.2m = 22$ $\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$ Giải ra được: $m = -5$ hoặc $m = 2$ Đối chiếu với điều kiện $m > -1$. Kết luận được $m = 2$	0,25 0,25 0,25
Bài IV		Vẽ hình đúng đến ý 1	0,25

(3 điểm)	1) (1đ)	 Xét (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến $\Rightarrow MA \perp OA; MB \perp OB$ Chứng minh được tứ giác OAMH nội tiếp.	0,25 0,5
	2) (1đ)	Ta có MA = MB, OA = OB nên OM là đường trung trực của AB $\Rightarrow OM \perp AB$. Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OHM$ có: $\widehat{OIK} = \widehat{OHM} = 90^\circ$, $\widehat{HOM}$ chung $\Rightarrow \triangle OIK \simeq \triangle OHM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM}$ $\Rightarrow OI \cdot OM = OH \cdot OK$.	0,5 0,25 0,25
		Ta có: $\widehat{BOE} = \widehat{AOE}$ (OM là phân giác của góc AOB) $\widehat{BOE} = sđ\widehat{BE}$, $\widehat{AOE} = sđ\widehat{AE}$ (góc ở tâm) Do đó: $\widehat{BE} = \widehat{AE}$ mà $\widehat{ABE} = \frac{sđ\widehat{AE}}{2}$ (góc nội tiếp); $\widehat{MBE} = \frac{sđ\widehat{BE}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) Nên $\widehat{ABE} = \widehat{MBE} \Rightarrow BE$ là tia phân giác của góc ABM. Xét $\triangle ABM$ có: BE là tia phân giác của góc ABM (cmt) MO là phân giác của góc AMB (tính chất 2 tia tiếp tuyến) Mà $BE \cap MO$ tại E nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.	0,25 0,25
	3) (1đ)	Ta có đường tròn (O), d cố định mà H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d nên H cố định.	

		Xét ΔOAM vuông tại A, $AI \perp OM$ có: $OI \cdot OM = OA^2 = R^2$ không đổi Mà $OK \cdot OH = OI \cdot OM$ Nên $OK \cdot OH = R^2$ không đổi. Vì O, H cố định nên K cố định. Ta có $OK^2 = OI^2 + IK^2 \geq 2OI \cdot IK = 4S_{\Delta OIK} \Rightarrow S_{\Delta OIK} \leq \frac{OK^2}{4}.$ Để diện tích tam giác OIK lớn nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta OIK} = \frac{OK^2}{4} \Leftrightarrow S_{\Delta OIK} = \frac{R^4}{4OH^2} \Leftrightarrow OI = IK$ Mà $\Delta OIK \sim \Delta OHM$ (cmt) $\Leftrightarrow OH = HM \Leftrightarrow M$ cách H một khoảng bằng OH.	0,25 0,25
Bài 5 (0,5 điểm)		$x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1 \quad (1)$ Với $x = 0$; $(1) \Leftrightarrow 0 = 1$ (vô lí) $\Rightarrow x = 0$ không là nghiệm của PT. Với x khác 0, chia cả hai vế của PT cho x $(1) \Leftrightarrow x + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - 2 = 0$ Đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$ $(1) \Leftrightarrow t^3 + t - 2 = 0 \quad (2)$	0,25
		Giải PT (2) được $t = 1$ $\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 1$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ Giải PT ta được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (tmdk $x \neq 0$) Vậy tập nghiệm của PT là $S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$	0,25

Ghi chú: Mọi cách làm khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa