

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN: TOÁN - LỚP 9**

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

(Đề bài gồm 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức: $B = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 1$

Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức B khi $a = 2023 - 2\sqrt{2022}$.

b) Chứng minh rằng: $A = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{56}{54}}}$ là một số nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x} = 3$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 2y^3 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm a, b để đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x-1$ dư 2, chia cho đa thức $x-2$ dư 17.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên tố cùng nhau thỏa mãn: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Chứng minh: $M = a+b$ là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm).

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Kẻ HI vuông góc với AB, HK vuông góc với AC (I thuộc AB, K thuộc AC). Chứng minh:

a) $\frac{BI}{CK} = \frac{AB^3}{AC^3}$

b) $CK \cdot \sqrt{BH} + BI \cdot \sqrt{CH} = AH \cdot \sqrt{BC}$

2) Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, một đường thẳng bất kỳ qua G, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N, Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{1}{4x+3y+z} + \frac{1}{x+4y+3z} + \frac{1}{3x+y+4z}$.

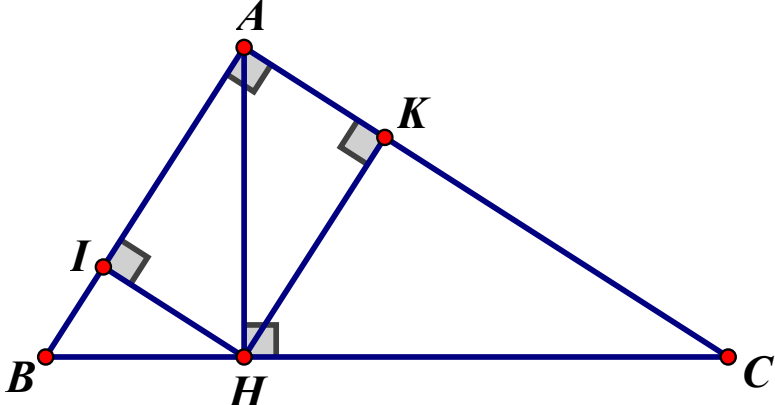
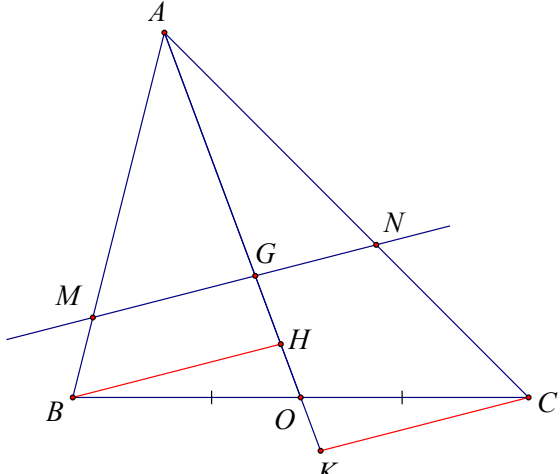
----- HẾT -----

Họ và tên học sinh.....Số báo danh.....

Chữ kí của giám thị 1..... Chữ kí của giám thị 2.....

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	$\begin{aligned} \text{a) } B &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right), \\ &= \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a+1} : \frac{a+1 - 2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a} - 1)^2} = 1 + \sqrt{a} \end{aligned}$	0,25
		Vậy $B = 1 + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$	0,25
		Khi $a = 2023 - 2\sqrt{2022} = (\sqrt{2022} - 1)^2$ thỏa mãn ĐK. Ta có $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2022} - 1)^2} = \sqrt{2022}$	0,25
	b	b) Ta có: $A = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{56}{54}}}$	
		$\Rightarrow A^3 = 1 + \sqrt{\frac{56}{54}} + 1 - \sqrt{\frac{56}{54}} + 3\sqrt[3]{1 - \frac{56}{54}} \cdot A = 2 + 3\sqrt[3]{-\frac{2}{54}} \cdot A$	0.25
		$\Leftrightarrow A^3 = 2 - A \Leftrightarrow A^3 + A - 2 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 2) = 0$	0.25
		Vì $A^2 + A + 2 > 0$ với mọi A.	0.25
		Nên ta có $A - 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$ là một số nguyên. Vậy $\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{56}{54}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{56}{54}}}$ là một số nguyên	0.25
2	a	$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow x+2 + 7-x + 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{7-x} (\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x}) &= 27 \end{aligned}$	0.25
		$\begin{aligned} \Leftrightarrow 9 + 9\sqrt[3]{(x+2)(7-x)} &= 27 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(7-x)} &= 2 \end{aligned}$	0.25
		$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+2)(7-x) &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$	0.25
		KL....	

b	$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 2y^3 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 & (2) \end{cases}$ Ta thấy $y = 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Do đó $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho y^3 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \frac{x}{y} - 2 = 0$	0.25	
	$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 2 \right] = 0$	0.25	
	$\Leftrightarrow \frac{x}{y} - 1 = 0 \quad \left(\text{vì } \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right)$ $\Leftrightarrow x = y$	0.25	
	Hệ phương trình đã cho tương đương với $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$ KL:.....	0.25	
3	a	Do đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia đa thức $x - 1$ dư 2 $\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 3 = 2 \Rightarrow a + b = -1$ (1)	0.25
		Do đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia đa thức $x - 2$ dư 17 $\Rightarrow f(2) = 17 \Rightarrow 2a + b + 16 = 17 \Rightarrow 2a + b = 1$ (2)	0.25
		Lấy (2) – (1) theo vế $\Rightarrow a = 2$	0.25
		Thay $a = 2$ vào (1) $\Rightarrow b = -3$	0.25
	b	Ta có: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow ab = ac + bc \Leftrightarrow ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow (a - c)(b - c) = c^2$	0.25
		Gọi $(a - c; b - c) = d \Rightarrow \begin{cases} a - c : d \\ b - c : d \end{cases}$ Mà $(a - c)(b - c) = c^2 \Rightarrow c^2 : d^2 \Rightarrow c : d \Rightarrow \begin{cases} a : d \\ b : d \end{cases}$	0.25
		$\Rightarrow a : d; b : d; c : d$ mà a, b, c nguyên tố cùng nhau nên $d = 1$. Suy ra : $a - c; b - c$ nguyên tố cùng nhau. Vậy để $(a - c)(b - c) = c^2$ thì $a - c; b - c$ là các SCP.	0.25
		Đặt $a - c = m^2; b - c = n^2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow c^2 = m^2 \cdot n^2 \Rightarrow c = m \cdot n$ Xét $M = a + b = (a - c) + (b - c) + 2c = m^2 + n^2 + 2mn = (m + n)^2$ Vậy $M = a + b$ là số chính phương.	0.25

1.a		0,25
	Vẽ hình đúng Xét tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH suy ra: $AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BH^2}{CH^2}$ (1) Xét tam giác ABH vuông tại H, có HI là đường cao suy ra: $BH^2 = BI.BA$; tương tự có $CH^2 = CK.CA \Rightarrow \frac{BH^2}{CH^2} = \frac{BI.BA}{CK.AC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BI.BA}{CK.AC} \Rightarrow \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BI}{CK}$ (đ.p.c.m)	0,25 0,25 0,25
1.b	Có $CK.\sqrt{BH} + BI.\sqrt{CH} = AH.\sqrt{BC}$ $\Leftrightarrow CK.\sqrt{BH.BC} + BI.\sqrt{CH.BC} = AH.BC$ $\Leftrightarrow CK.AB + BI.AC = AB.AC$ $\Leftrightarrow \frac{CK}{AC} + \frac{BI}{AB} = 1$ Xét tam giác ABC có HK//AB theo định lí TaLet có: $\frac{CK}{CA} = \frac{CH}{BC}$ (1); tương tự có $\frac{BI}{BA} = \frac{BH}{BC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CK}{AC} + \frac{BI}{AB} = 1$ (đ.p.c.m)	0,25 0,25 0,25 0,25
2		
	Gọi O là trung điểm của BC, Kẻ BH, CK lần lượt // MN ($H, K \in AO$) $\Delta BOH = \Delta COK$ (g.c.g) $\Rightarrow OH = OK$	0,25

		$\Delta ABH \text{ có } MG // BH \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AH}{AG} \quad (1)$	0,25
		$\Delta AKC \text{ có } GN // KC \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG} \quad (2)$	0,25
		Cộng (1) và (2) theo về ta được: $VT = \frac{AH}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AG + GH + AG + GH + HK}{AG} = \frac{2AG + 2GO}{AG} = \frac{3AG}{AG} = 3$	0,25
5		Có $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (1)$ Ta chứng minh với x, y dương: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (*)$ $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) (x+y) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 \frac{y}{x} + b^2 \frac{x}{y} \geq 2ab$ $\Leftrightarrow \left(a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 \geq 0$ luôn đúng; “=” $\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}} = 0 \Leftrightarrow a = b\frac{x}{y}$	0,25
		Áp dụng(*) ta có: $\frac{1^2}{y} + \frac{1^2}{z} \geq \frac{(1+1)^2}{y+z} = \frac{2^2}{y+z}$ (“=” $\Leftrightarrow y : z = 1$) $\Rightarrow \frac{2^2}{2y} + \frac{2^2}{y+z} \geq \frac{(2+2)^2}{3y+z} = \frac{4^2}{3y+z}$ (“=” $\Leftrightarrow 2y = y+z \Leftrightarrow y = z$) $\Rightarrow \frac{4^2}{4x} + \frac{4^2}{3y+z} \geq \frac{(4+4)^2}{4x+3y+z} = \frac{64}{4x+3y+z}$ (“=” $\Leftrightarrow 4x = 3y+z$)	0,25
		$\Rightarrow \frac{64}{4x+3y+z} \leq \frac{4^2}{4x} + \frac{2^2}{2y} + \frac{1^2}{y} + \frac{1^2}{z} = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z}$ (“=” $\Leftrightarrow 4x = 3y+z \& y = z \Leftrightarrow x=y=z$)	0,25
		Tương tự: $\frac{64}{x+4y+3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z}$ (“=” $\Leftrightarrow x = y = z$) $\frac{64}{3x+y+4z} \leq \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}$ (“=” $\Leftrightarrow x = y = z$) $M = \frac{1}{4x+3y+z} + \frac{1}{x+4y+3z} + \frac{1}{3x+y+4z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{8}$ (theo (1)) Vậy M đạt GTLN là $\frac{1}{8}$ khi $x = y = z = 3$ (theo (1))	0,25