

Đề chính thức

Ngày 02 tháng 11 năm 2023

Thời gian 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (4.0 điểm)

- a) Tính giá trị của $P = (\sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12})(\sqrt{10} + \sqrt{11} - \sqrt{12})(\sqrt{10} - \sqrt{11} + \sqrt{12})(\sqrt{10} - \sqrt{11} - \sqrt{12})$.
- b) Cho các số thực $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab} = a - 4b$. Tính $Q = \frac{\sqrt[3]{ab} (2024\sqrt[3]{a} - 2023\sqrt[3]{b})}{\sqrt{2ab}}$.

Câu 2. (4.0 điểm)

- a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7} + \sqrt{9-x} = 3x^2 - 48x + 194$.
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $B(-1; 2)$ và hai đường thẳng $(d_1) : y = m^2x - m^4 + 2$ và $(d_2) : y = \frac{m^2}{m^2+1}x + 2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2) ; hai điểm C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\frac{15}{2}$.

Câu 3. (4.0 điểm)

- a) Một cặp số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là “cặp số nguyên tố sinh đôi”. Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1, 6m+1)$ với m là số nguyên dương.
- b) Cho hai số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^2 - 4b + 1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R > R'$. Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A . Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B \in (O), C \in (O')$.

- a) Chứng minh rằng $OM \parallel O'N$.
- b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.
- c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

Câu 5. (3.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \geq a+b+c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

===Hết===

Lưu ý: Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không được gợi ý gì thêm.

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....