

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ BÀI

Bài I (4,0 điểm)

$$A = 4,25 \times 57,43 - 325 + 42,57 \times 4,25$$

$$B = 2018 - \frac{1}{2}(1+2) - \frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{2017}(1+2+3+\dots+2017)$$

$$C = \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2018} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2017}$$

$$D = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$$

Bài II (4,0 điểm)

Tìm x biết:

$$a) \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3,2) + \frac{2}{5} \right|$$

$$b) (x - 7)^{x+1} - (x - 7)^{x+11} = 0$$

$$c) |2x + 5| = 10 + x$$

Bài III (4,0 điểm)

a) Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

$$b) \text{Cho } \frac{a}{c} = \frac{c}{b}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$$

$$c) \text{Cho } abc \neq 0 \text{ và } \frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}. \text{ Tính } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

Bài IV (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

a) AC = EB và AC // BE.

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$.

Tính số đo $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Bài V (2,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ (với $n \in \mathbb{N}$) đều là các số chính phương thì n là 40

..... Hết

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN: TOÁN 7

Bài I (4,0 điểm)

- Tính đúng A được (1,0 điểm)
- Tính đúng B được (1,0 điểm)
- Tính đúng C được (1,0 điểm)

$$C = \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2018} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2017} = \left[\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right]^{2018} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{2^6}{2^8} \right)^{2017} = 1^{2018} - 1^{2017} = 0$$

- Tính đúng D được (1,0 điểm)

$$D = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Bài II (4,0 điểm)

a) (1,5 điểm)

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| \frac{-16}{5} + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$
$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ x = -2 + \frac{1}{3} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

b) (1,5 điểm)

$$(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^{(x+1)} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-7)^{10} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \\ (x-7)^{10} = 1 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

Vậy $x = 6, 7, 8$

c) (1,0 điểm) Xét 2 TH tìm được: $x = 5$ hoặc $x = -5$

Bài III (4,0 điểm)

a) (1,5 điểm) Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A.

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1)

và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$

Do đó (2) $\Leftrightarrow k^2(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36}) = 24309$

$\Rightarrow k = 180$ và $k = -180$

+ Với $k = 180$, ta được: $a = 72; b = 135; c = 30$.

Khi đó ta có số $A = a + b + c = 237$.

+ Với $k = -180$, ta được: $a = -72; b = -135; c = -30$

Khi đó ta có số $A = -72 + (-135) + (-30) = -237$.

b) (1,5 điểm) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ suy ra $c^2 = ab$. Khi đó $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

c) (1,0 điểm) Tính được $P = 8$ hoặc $P = -1$

Bài IV (6,0 điểm)

a) (2,0 điểm) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$ (gt)

$\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$

(2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE). Suy ra $AC \parallel BE$.

b) (2,0 điểm)

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$AM = EM$ (gt)

$\angle MAI = \angle MEK$ (vì $\angle MAI = \angle MEK$ (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$))

$AI = EK$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c). Suy ra: $\angle AMI = \angle MEK$.

Mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Ba điểm I; M; K thẳng hàng.

c) (2,0 điểm)

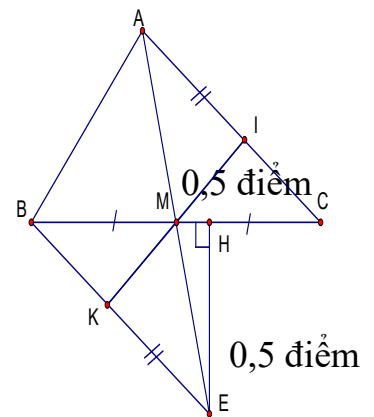
Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có: $\angle HBE = 50^\circ$

$\Rightarrow \angle HEB = 90^\circ - \angle HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$

Mà $\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$\Rightarrow \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$



Bài V (2,0 điểm) Chứng minh cho n chia hết cho 5 và 8.

$2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1 $\Rightarrow n$ chẵn $\Rightarrow 3n+1$ là số chính phương lẻ, số này chia cho 8 dư 1 nên $3n$ chia hết cho 8, do đó n chia hết cho 8 (1).

Do n là số chia hết cho 8, nên $3n + 1$ tận cùng 1, 5, 9 $\Rightarrow 3n$ tận cùng 0, 4, 8 $\Rightarrow n$ tận cùng 0, 8, 6. Loại trường hợp n tận cùng 8 (vì khi đó $2n + 1$ tận cùng 7, không là số chính phương), loại trường hợp n tận cùng 6 (vì khi đó $2n + 1$ tận cùng 3, không là số chính phương). Vậy n tận cùng 0 (2).

Từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Một số bài số hay

1. $A = n^2 + 7n + 22 = (n + 5)(n + 2) + 12$.

Các số $n + 2$ và $n + 5$ có hiệu bằng 3 nên chúng cùng chia hết hoặc cùng không chia hết cho 3. Nếu chúng cùng chia hết cho 3 thì $(n + 5)(n + 2)$ chia hết cho 9, suy ra A không chia hết cho 9. Nếu chúng cùng không chia hết cho 3 (3 là số nguyên tố) thì không chia hết cho 3, suy ra A không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9.

2. Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức là số nguyên tố: $12n^2 - 5n - 25$

Phân tích thành nhân tử :

$$\begin{aligned} 12n^2 - 5n - 25 &= 12n^2 + 15n - 20n - 25 \\ &= 3n(4n + 5) - 5(4n + 5) = (4n + 5)(3n - 5). \end{aligned}$$

Do $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố và

$$4n + 5 > 0 \text{ nên } 3n - 5 > 0.$$

Ta lại có $3n - 5 < 4n + 5$ (vì $n \geq 0$)

Nên để $12n^2 - 5n - 25$ là số nguyên tố thì thừa số nhỏ phải bằng 1.

Giải điều kiện $3n - 5 = 1$, được $n = 2$.

Khi đó, $12n^2 - 5n - 25 = 13 \cdot 1 = 13$, là số nguyên tố.

Vậy với $n = 2$ thì giá trị của biểu thức

$$12n^2 - 5n - 25 \text{ là số nguyên tố } 13.$$

3. Tìm số nguyên n sao cho: $n^2 + 2n - 4$ chia hết cho 11

$$n^2 + 2n - 4 = (n - 3)(n + 5) + 11 \text{ chia hết}$$

cho 11.

Vậy $n = \text{BS } 11 + 3$ hoặc $n = \text{BS } 11 - 5$.

4. Chứng minh rằng nếu $n + 1$ và $2n + 1$ (n thuộc $\mathbb{N}$) đều là số chính phương thì n chia hết cho 24

Chứng minh n chia hết cho 3 :

Nếu $n = 3k + 1$ thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương, loại.

Nếu $n = 3k + 2$ thì $2n + 1 = 3(2k + 1) + 2$, không là số chính phương, loại.

Vậy n chia hết cho 3.

Chứng minh n chia hết cho 8 :

Ta có $2n + 1$ là số chính phương lẻ

Nên chia cho 8 dư 1 (1), do đó $2n$ chia hết cho 8, n chia hết cho 4, $n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, do đó n chia hết cho 8.

5. Tìm số nguyên tố p để: $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là những số nguyên tố.

Xét $p = 5k \pm 1$ thì $4p^2 + 1$ là hợp số.

Xét $p = 5k \pm 2$ thì $6p^2 + 1$ là hợp số.

Do đó $p = 5$. Khi đó $4p^2 + 1 = 101$;

$6p^2 + 1 = 151$ đều là các số nguyên tố.