

**Bài 1 (4,0 điểm).**

a) Tính  $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$

b) Tìm x biết:  $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

c) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn:  $3^x + 4^x = 5^x$

**Bài 2 (3,0 điểm).**

a) Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Biết  $f(-1)$ ;  $f(0)$ ;  $f(1)$  đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng  $a, b, c$  đều chia hết cho 3.

b) Cho đa thức  $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$ . Tính giá trị của đa thức  $B(x)$  tại  $x = \frac{1}{2}$

**Bài 3 (4,0 điểm).**

a) Cho  $x, y, z$  thỏa mãn:  $x^2 = yz$ ,  $y^2 = xz$ ,  $z^2 = xy$ . Chứng minh rằng:  $x = y = z$

b) Tìm  $x, y, z$  biết:

$$\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96.$$

**Bài 4 (3,0 điểm).**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + \sqrt{x} + 1$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$ .

**Bài 5 (5,0 điểm).**

Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.

a) Chứng minh  $\triangle DBM = \triangle FMB$

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng  $MD + ME$  có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho  $CK = EH$ . Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK.

**Bài 6 (1,0 điểm).**

Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

-----HẾT-----

Họ và tên học sinh:.....Số báo danh: .....

**HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 7 – NĂM HỌC 2015-2016**

Bài	Nội dung	Biểu điểm
	a) Tính $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$ b) Tìm x biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$ c) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x + 4^x = 5^x$	
1	a) Tính: $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$ $= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5}\right) : \frac{2}{3}$ $= \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)\right] : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0$ Vậy : $A = 0$	0,5 0,75 0,25
1	b) Tìm x: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}x = \frac{-1}{3}$ $x = \frac{-1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{-4}{3}$ Vậy $x = \frac{-4}{3}$	0,75 0,5 0,25
	c) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x + 4^x = 5^x$ +) Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn +) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn +) $x > 2$ $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 (*)$ Với $x > 2$ ta có $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ ( vì $\frac{3}{5} < 1; \frac{4}{5} < 1$ ) Suy ra $x > 2$ không thỏa mãn Vậy $x = 2$	0,25 0,25 0,25
2	a) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ , với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a, b, c$ đều chia hết cho 3.	

	<p>b) Cho đa thức <math>B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}</math>. Tính giá trị của đa thức <math>B(x)</math> tại <math>x = \frac{1}{2}</math></p>	
	<p>a) Ta có: <math>f(0) = c</math>; <math>f(1) = a + b + c</math>; <math>f(-1) = a - b + c</math></p> <p>+)<math>f(0):3 \Rightarrow c:3</math></p> <p>+)<math>f(1):3 \Rightarrow a + b + c:3 \Rightarrow a + b:3</math> (1)</p> <p>+)<math>f(-1):3 \Rightarrow a - b + c:3 \Rightarrow a - b:3</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) Suy ra <math>(a + b) + (a - b):3 \Rightarrow 2a:3 \Rightarrow a:3</math> vì <math>(2; 3) = 1 \Rightarrow b:3</math></p> <p>Vậy <math>a, b, c</math> đều chia hết cho 3</p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
	<p>b) Với <math>x = \frac{1}{2}</math> thì giá trị của đa thức</p> $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$ $2B = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$ $= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$ $\Rightarrow 2B = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$ $\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}}$ $\Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$ <p>Vậy <math>B = 2 - \frac{1}{2^{100}}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>a) Cho <math>x, y, z</math> thỏa mãn: <math>x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy</math>.</p> <p>Chứng minh rằng: <math>x = y = z</math></p> <p>b) Tìm <math>x, y, z</math> biết:</p> $\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96.$	
3	<p>a) TH1: Nếu <math>x = 0</math> thì <math>y = z = 0</math> suy ra <math>x = y = z</math>. Tương tự với <math>y; z</math></p> <p>TH2: <math>x, y, z</math> là các số khác 0 từ <math>x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy</math></p> $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ <p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau</p> $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x + y + z}{y + z + x} = 1 \Rightarrow x = y = z$ <p>Vậy <math>x = y = z</math> (đpcm)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>

	<p>b) Từ <math>\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{20z - 24y}{16} = \frac{30x - 20z}{25} = \frac{24y - 30x}{36}</math></p> <p><math>= \frac{20z - 24y + 30x - 20z + 24y - 30x}{10 + 25 + 36} = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow 20z - 24y = 30x - 20z = 24y - 30x = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow 20z = 24y = 30x</math></p> <p><math>\Rightarrow 10z = 12y = 15x</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x - 2y + 5z}{12 - 10 + 30} = \frac{96}{32} = 3</math></p> <p>Giải ra và kết luận : <math>x = 12 ; y = 15</math> và <math>z = 18</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>a) Tìm giá trị nhỏ nhất của <math>P = x + \sqrt{x} + 1</math></p> <p>b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : <math>2^a + 7 =  b - 5  + b - 5</math>.</p>	
	<p>a) ĐK: <math>x \geq 0</math></p> <p>Ta có <math>x \geq 0; \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1</math></p> <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>x = 0</math> (tmdk)</p> <p>Vậy <math>P_{\min} = 0</math> tại <math>x = 0</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
4	<p>b) Nhận xét: Với <math>x \geq 0</math> thì <math> x  + x = 2x</math></p> <p>Với <math>x &lt; 0</math> thì <math> x  + x = 0</math>. Do đó <math> x  + x</math> luôn là số chẵn với <math>\forall x \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Áp dụng nhận xét trên thì <math> b - 5  + b - 5</math> là số chẵn với <math>b - 5 \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Suy ra <math>2^a + 7</math> là số chẵn <math>\Rightarrow 2^a</math> lẻ <math>\Leftrightarrow a = 0</math>.</p> <p>Khi đó <math> b - 5  + b - 5 = 8</math></p> <p>+ Nếu <math>b &lt; 5</math>, ta có <math>-(b - 5) + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8</math> (loại)</p> <p>+ Nếu <math>b \geq 5</math>, ta có <math>2(b - 5) = 8 \Leftrightarrow b - 5 = 4 \Leftrightarrow b = 9</math> (thỏa mãn)</p> <p>vậy <math>(a; b) = (0; 9)</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>Cho tam giác ABC cân tại A, BH vuông góc AC tại H. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH.</p> <p>a) Chứng minh <math>\triangle DBM = \triangle FMB</math></p> <p>b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng <math>MD + ME</math> có giá trị không đổi.</p> <p>c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho <math>CK = EH</math>. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK.</p>	
	Vẽ hình và ghi GT, KL	

		0,5
	a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn)	1
	b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch-gn) $\Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1) +) Chứng minh: $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2) Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$ BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)	0,25 0,5 0,5 0,25
	c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P, $KQ \perp BC$ tại Q, gọi I là giao điểm của DK và BC +) Chứng minh : $BD = FM = EH = CK$ +) Chứng minh : $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch-gn) $\Rightarrow DP = KQ$ (cạnh tương ứng) +) Chứng minh : $\widehat{IDP} = \widehat{IKQ} \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI$ (g-c-g) $\Rightarrow ID = IK$ (đpcm)	0,5 0,5 0,5 0,5
	Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$	
6	+) $0 \leq (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ; $c^2 + a^2 \geq 2ca$ ; $\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ $\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1) +) Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$ Nhân cả hai vế với a dương ta được: $a^2 < ab + ac$ Tương tự: $b^2 < ba + bc$ ; $c^2 < ca + cb$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca)$ (2) Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh	0,25 0,25 0,25 0,25

**Lưu ý :**

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày những ý cơ bản, nếu học sinh có cách giải khác mà đúng thì Giám khảo vẫn cho điểm nhưng không vượt quá thang điểm của mỗi ý đó.
- Phần hình học, học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Tổng điểm toàn bài bằng tổng điểm của các câu không làm tròn.