

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN - Lớp 11 THPT

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2 điểm). Cho $(P_m): y = x^2 - 2mx + m^2 + m$. Biết rằng (P_m) luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B . Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox , A_2, B_2 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Oy . Tìm m để tam giác OB_1B_2 có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác OA_1A_2 .

Câu 2 (4 điểm).

1. Giải phương trình $\frac{2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) & (1) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} & (2) \end{cases}$.

Câu 3 (4 điểm).

1. Chứng minh rằng $(C_{2022}^1)^2 - (C_{2022}^2)^2 + (C_{2022}^3)^2 - \dots + (C_{2022}^{2021})^2 - (C_{2022}^{2022})^2 = C_{2022}^{1011} + 1$.

2. Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_{2020}$ nội tiếp đường tròn tâm O , chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tứ giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác.

Câu 4 (2 điểm). Nhà anh A muốn khoan một cái giếng sâu 20 mét dùng để lấy nước cho sinh hoạt gia đình. Có hai cơ sở khoan giếng tính chi phí như sau:

Cơ sở I: Mét thứ nhất 200 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét tăng thêm 60 nghìn đồng so với giá của mỗi mét trước đó.

Cơ sở II: Mét thứ nhất 10 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét gấp $\sqrt{2}$ lần so với giá của mỗi mét trước đó.

Hỏi gia đình anh A để tiết kiệm tiền thì nên chọn cơ sở nào để thuê, biết rằng hai cơ sở trên có chất lượng khoan là như nhau.

Câu 5 (6 điểm).

1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo BD và AC vuông góc với nhau tại H và $AD = 2BC$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AM$, N là trung điểm HC . Biết $B(-1; -3)$, đường thẳng HM đi qua điểm $T(2; -3)$, đường thẳng DN có phương trình $x + 2y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, C và D .

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi O là giao điểm của AC và BD . I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I và cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{2SM^2} + \frac{1}{2SN^2} + \frac{1}{SP^2} + \frac{1}{SQ^2}.$$

3. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, mặt phẳng (α) thay đổi và song song với hai đáy của lăng trụ lần lượt cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 tại M, N, P, Q . Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (α) để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 6 (2 điểm).

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

2. Giải phương trình $\sqrt{1+2020x} + \sqrt{1-2020x} = (1+2021x)\sqrt{1-2021x} + (1-2021x)\sqrt{1+2021x}$.

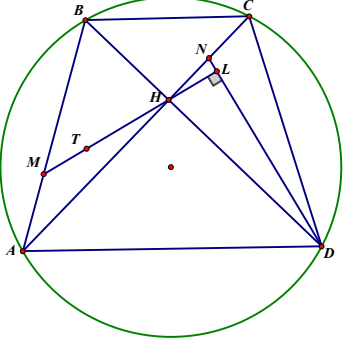
----- Hết -----

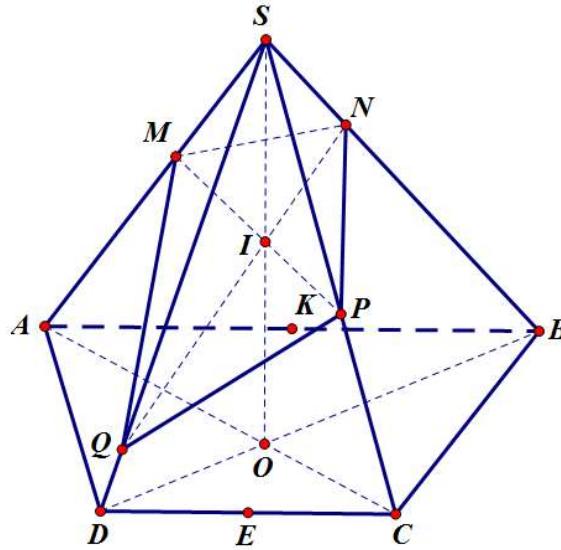
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM
(Gồm có 06 trang)

Câu	NỘI DUNG	Điểm
I 2,0 điểm	Cho $(P_m): y = x^2 - 2mx + m^2 + m$. Biết rằng (P_m) luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B . Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox , A_2, B_2 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Oy . Tìm m để tam giác OB_1B_2 có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác OA_1A_2 .	2,0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2mx + m^2 + m = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 1 \end{cases}$.	0,5
	*TH1: $A(m; m) \Rightarrow A_1(m; 0); A_2(0; m)$. $B(m+1; m+1) \Rightarrow B_1(m+1; 0); B_2(0; m+1)$. Khi đó $S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1}{3} \end{cases}$.	0,75
	*TH2: $B(m; m) \Rightarrow B_1(m; 0); B_2(0; m)$. $A(m+1; m+1) \Rightarrow A_1(m+1; 0); A_2(0; m+1)$. Khi đó $S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(m+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{-2}{3} \end{cases}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,75
II 4,0 điểm	1. Giải phương trình $\frac{2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1$.	2,0
	Điều kiện: $x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ (*).	0,5
	Phương trình tương đương $2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 + \sqrt{3} = 2 \cos x + \sqrt{3}$	
	$\Leftrightarrow 2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (2 \sin 2x - 2 \cos x) - (1 - 2 \sin^2 x) - 7 \sin x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2\cos x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sin x + 2\cos x - 3 = 0 \end{cases}$ - Giải (1): $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ - Giải (2): $\sin x + 2\cos x = 3$ vô nghiệm vì $1^2 + 2^2 < 3^2$.	0,5
	Đổi chiều điều kiện (*) phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) & (1) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} & (2) \end{cases}$	2,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$ (*)	0,25
	Phương trình (1) $\Leftrightarrow y(y-2)^2 = \sqrt{x+1}[(y-2)^2 - y + \sqrt{x+1}]$ $\Leftrightarrow (y - \sqrt{x+1})[(y-2)^2 + \sqrt{x+1}] = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1}$ vì $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (y-2)^2 + \sqrt{x+1} > 0$.	0,5
	Thế $y = \sqrt{x+1}$ vào phương trình (2) ta có: $2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = (x+1)(x-1)^2 + x\sqrt{3x-2}$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = x^3 - x^2 - x + 1 + x\sqrt{3x-2}$ $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1) = x(\sqrt{3x-2} - x) + x^3 - 7x + 6$ $\Leftrightarrow 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} = x \frac{3x - 2 - x^2}{\sqrt{3x-2} + x} + (x^2 - 3x + 2)(x + 3)$	0,5
	$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(x + 3 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - \frac{x}{\sqrt{3x-2} + x} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 & (3) \\ x + 3 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - \frac{x}{\sqrt{3x-2} + x} = 0 & (4) \end{cases}$	0,25
	- Giải (3) ta được $x = 1; x = 2$ - Giải (4): phương trình $x + 3 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} - \frac{x}{\sqrt{3x-2} + x} = 0$ $\Leftrightarrow x + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} \right) + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3x-2} + x} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x + \frac{2\sqrt{x^2 - 3x + 3}}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} + \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2} + x} = 0$ vô nghiệm vì vế trái luôn dương với $\forall x \geq \frac{2}{3}$. Đổi chiều điều kiện (*) suy ra tập nghiệm hệ là $S = \{(1; \sqrt{2}), (2; \sqrt{3})\}$.	0,5
III 4,0 điểm	1. Chứng minh rằng $(C_{2022}^1)^2 - (C_{2022}^2)^2 + (C_{2022}^3)^2 - \dots + (C_{2022}^{2021})^2 - (C_{2022}^{2022})^2 = C_{2022}^{1011} + 1$.	2,0
	Ta có	0,25

	$\left(C_{2022}^1\right)^2 - \left(C_{2022}^2\right)^2 + \left(C_{2022}^3\right)^2 - \dots + \left(C_{2022}^{2021}\right)^2 - \left(C_{2022}^{2022}\right)^2 = C_{2022}^{1011} + 1$ $\Leftrightarrow \left(C_{2022}^0\right)^2 - \left(C_{2022}^1\right)^2 + \left(C_{2022}^2\right)^2 - \left(C_{2022}^3\right)^2 + \dots - \left(C_{2022}^{2021}\right)^2 + \left(C_{2022}^{2022}\right)^2 = -C_{2022}^{1011}$	
	$(1+x)^{2022} = C_{2022}^0 + xC_{2022}^1 + x^2C_{2022}^2 + x^3C_{2022}^3 + \dots + x^{2022}C_{2022}^{2022}$ $(x-1)^{2022} = x^{2022}C_{2022}^0 - x^{2021}C_{2022}^1 + x^{2020}C_{2022}^2 - x^{2019}C_{2022}^3 + \dots - xC_{2022}^{2021} + C_{2022}^{2022}$ Hệ số x^{2022} trong khai triển $(1+x)^{2022}(x-1)^{2020}$ là $\left(C_{2022}^0\right)^2 - \left(C_{2022}^1\right)^2 + \left(C_{2022}^2\right)^2 - \left(C_{2022}^3\right)^2 + \dots - \left(C_{2022}^{2021}\right)^2 + \left(C_{2022}^{2022}\right)^2.$	0,75
	Mà $(1+x)^{2022}(x-1)^{2020} = (1-x^2)^{2022} = \sum_{k=0}^{2022} C_{2022}^k (-1)^k x^{2k}.$	0,5
	Hệ số của x^{2022} trong khai triển $(1-x^2)^{2022}$ là $-C_{2022}^{1011}.$ Vậy có điều phải chứng minh.	0,5
	2. Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_{2020}$ nội tiếp đường tròn tâm O, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tứ giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác.	2,0
	Xác định được không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{2020}^4$	0,5
	Xác định được biến cố, chỉ ra ứng với mỗi cạnh có C_{2019}^2 (chia 2016 cái kẹo cho 3 bạn mà bạn nào cũng có kẹo) tứ giác thỏa mãn bài toán.	0,5
	$n(A) = 2020.C_{2019}^2$	0,5
	Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{2017}$	0,5
IV 2,0 điểm	1. Nhà anh A muốn khoan một cái giếng sâu 20 mét dùng để lấy nước cho sinh hoạt gia đình. Có hai cơ sở khoan giếng tính chi phí như sau: Cơ sở I: mét thứ nhất 200 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét tăng thêm 60 nghìn đồng so với giá của mỗi mét trước đó. Cơ sở II: mét thứ nhất 10 nghìn đồng và kể từ mét thứ hai trở đi, giá của mỗi mét gấp $\sqrt{2}$ lần so với giá của mỗi mét trước đó. Hỏi gia đình anh A để tiết kiệm tiền thì nên chọn cơ sở nào để thuê, biết rằng hai cơ sở trên có chất lượng khoan là như nhau.	2,0
	Cơ sở I: Gọi u_n (nghìn đồng) là số tiền chi phí khoan giếng ở mét thứ n. Theo giả thiết ta có $u_1 = 200$ và $u_{n+1} = u_n + 60$ Chứng minh dãy số u_n là một cấp số cộng có công sai $d = 60$.	0,5
	Vậy số tiền thanh toán cho cơ sở I khoan giếng khi khoan giếng sâu 20 mét là: $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 20u_1 + \frac{20.19}{2}d = 15400 \text{ (nghìn đồng)}.$	0,5
	Cơ sở II: Gọi v_n (nghìn đồng) là số tiền chi phí khoan giếng ở mét thứ n. Theo giả thiết ta có $v_1 = 10$ và $v_{n+1} = v_n \sqrt{2}$ Chứng minh dãy số v_n là một cấp số nhân có công bội $q = \sqrt{2}$.	0,5
	Vậy số tiền thanh toán cho cơ sở II khoan giếng khi khoan giếng sâu 20 mét là: $S_{20} = v_1 + v_2 + \dots + v_{20} = v_1 \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 24697 \text{ (nghìn đồng)}.$ Vậy gia đình anh A nên thuê cơ sở I.	0,5

	1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo BD và AC vuông góc với nhau tại H và $AD = 2BC$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AM$, N là trung điểm HC. Biết $B(-1; -3)$, đường thẳng HM đi qua điểm $T(2; -3)$, đường thẳng DN có phương trình $x + 2y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, C và D.	2,0
V 6,0 điểm	 Ta có $ABCD$ là hình thang cân nên có hai đường chéo BD và AC vuông góc với nhau tại H nên $HB = HC, HA = HD$.	0,5
	Ta đặt $HB = HC = a, HA = HD = b$ ($a, b > 0$), khi đó: $\overrightarrow{HM} = \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{HB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{HA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{HB}$ $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$ Suy ra $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DN} = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{HA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{HB} \right) \left(\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HC} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{HB} = -\frac{1}{3} ab + \frac{1}{3} ab = 0$. Do đó $HM \perp DN$ Đường thẳng HM đi qua $T(2; -3)$ và vuông góc với DN nên có phương trình là: $2x - y - 7 = 0$	0,5
	Gọi $H(t; 2t - 7) \in HM$. Theo định lí Talet ta có: $\frac{HD}{HB} = \frac{AD}{BC} = 2$ và $\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HB}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{HD} = -2\overrightarrow{HB}$, suy ra $D(3t + 2; 6t - 15)$. Mặt khác $D \in DN$ nên $3t + 2 + 2(6t - 15) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(2; -3) \Rightarrow D(8; -3)$.	0,5
	Nhận xét rằng $H \equiv T$, đường thẳng $BD: y = -3$. Đường thẳng AC đi qua H và vuông góc với BD có phương trình: $x - 2 = 0$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow N(2; 0)$. Vì N là trung điểm của HC nên $C(2; 3)$. Mặt khác $\overrightarrow{HA} = -4\overrightarrow{HN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = 0 \\ y_A + 3 = -4(0 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = -15 \end{cases} \Rightarrow A(2; -15)$. Vậy tọa độ ba điểm cần tìm là $A(2; -15), C(2; 3), D(8; -3)$.	0,5
	2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB \parallel CD, AB = 2CD$. Các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi O là giao điểm của AC và BD. I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I và cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{2SM^2} + \frac{1}{2SN^2} + \frac{1}{SP^2} + \frac{1}{SQ^2}$.	2,0



0,5

Gọi K là trung điểm của AB , E là trung điểm của CD

Ta có

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SK}$$

$$\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SE}$$

$$\text{Do: } \begin{cases} CD \parallel AB \\ AB = 2CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SE} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SO})$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{SE} \Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SK} + 4\overrightarrow{SE} = 6\overrightarrow{SO}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SM} \frac{SA}{SM} + \overrightarrow{SN} \frac{SB}{SN} + \overrightarrow{SP} \frac{2SC}{SP} + \overrightarrow{SQ} \frac{2SD}{SQ} = 6\overrightarrow{SO} = 12\overrightarrow{SI}$$

0,5

Do M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{2SC}{SP} + \frac{2SD}{SQ} = 12$. Suy ra

$$\frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{2}{SP} + \frac{2}{SQ} = 12.$$

0,5

$$\Rightarrow 12^2 \leq \left(\frac{1}{2SM^2} + \frac{1}{2SN^2} + \frac{1}{SP^2} + \frac{1}{SQ^2} \right) (2 + 2 + 2^2 + 2^2)$$

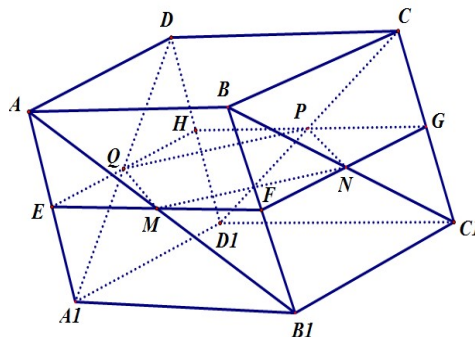
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2SM^2} + \frac{1}{2SN^2} + \frac{1}{SP^2} + \frac{1}{SQ^2} \geq 12$$

0,5

Vậy $\min T = 12$ khi $SM = SN = SP = SQ = \frac{1}{2}$.

3. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, mặt phẳng (α) thay đổi và song song với hai đáy của lăng trụ lần lượt cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 tại M, N, P, Q . Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (α) để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

2,0



VI 2,0 điểm	Giả sử mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt tại E, F, G, H. Do mặt phẳng $(\alpha) \parallel (ABCD)$ nên ta có: $\frac{AE}{AA_1} = \frac{BF}{BB_1} = \frac{CG}{CC_1} = \frac{DH}{DD_1}$.	0,5
	Đặt $\frac{AE}{AA_1} = x, (0 < x < 1); S_{\square ABCD} = S$ với S là hằng số. Ta có $S_{\square EFGH} = S$. Suy ra $\frac{EM}{EF} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AE}{AA_1} = x \Rightarrow \frac{EQ}{EH} = \frac{A_1Q}{A_1D} = \frac{A_1E}{A_1A} = 1 - x$.	0,5
	$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EMQ}}{S_{\triangle EFH}} = \frac{EQ}{EH} \cdot \frac{EM}{EF} = x(1-x) \Rightarrow S_{\triangle EMQ} = x(1-x)S_{\triangle EFH}$. Chứng minh tương tự ta có: $S_{\triangle HPQ} = x(1-x)S_{\triangle HGE}; S_{\triangle PGN} = x(1-x)S_{\triangle HGF}; S_{\triangle NFM} = x(1-x)S_{\triangle GFE}$. Ta có $S_{\square MNPQ} = S - (S_{\triangle EMQ} + S_{\triangle PGH} + S_{\triangle PGN} + S_{\triangle NFM})$ $= S - x(1-x)(S_{\triangle EFH} + S_{\triangle HEG} + S_{\triangle HGF} + S_{\triangle GFE}) = S - x(1-x)2S = S(1 - 2x + 2x^2)$.	0,5
	Ta có $1 - 2x + 2x^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\square MNPQ} \geq \frac{S}{2}$. Khi đó $S_{\square MNPQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{S}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy mặt phẳng (α) đi qua trung điểm các cạnh AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.	0,5
	1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$	1,0
	Ta có $0 \leq (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq 4ab(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 \geq 4ab(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{4ab} \Leftrightarrow 1 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ Tương tự có $1 - \frac{bc}{b^2 + c^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right); 1 - \frac{ca}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$.	0,5
	Do đó, cộng theo vế các bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức Schur cùng giả thiết $abc = 1$ ta được $3 - \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right)$ $= \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{4abc} = \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{4}$ $\leq \frac{1}{4}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) = \frac{1}{4}(a^3 + b^3 + c^3 + 3)$ Hay $a^3 + b^3 + c^3 + 4\left(\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2}\right) \geq 9$ (1)	0,25

Mặt khác $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3.3\sqrt[3]{(abc)^3} = 9 \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $4 \left[a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \right] \geq 18$ Do vậy $a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0,25
2. Giải phương trình $\sqrt{1+2020x} + \sqrt{1-2020x} = (1+2021x)\sqrt{1-2021x} + (1-2021x)\sqrt{1+2021x}.$	1,0
$VT^2 = (\sqrt{1+2020x} + \sqrt{1-2020x})^2 \geq 4\sqrt{1-(2020x)^2}$	0,25
$x^2 \geq 0 \Rightarrow (2021x)^2 \geq (2020x)^2 \Leftrightarrow 1-(2021x)^2 \leq 1-(2020x)^2$ $\Rightarrow 4\sqrt{1-(2021x)^2} \leq 4\sqrt{1-(2020x)^2} \Rightarrow VT \geq 4\sqrt{1-(2021x)^2}$	0,25
$VP^2 = [(1+2021x)\sqrt{1-2021x} + (1-2021x)\sqrt{1+2021x}]^2$ $\leq 2[(1+2021x)^2(1-2021x) + (1+2021x)(1-2021x)^2] \leq 4\sqrt{1-(2021x)^2}$ Thật vậy, $\begin{cases} a = 1-2021x \\ b = 1+2021x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 1-ab=(2021x)^2 \end{cases}$ $2(a^2b + ab^2) \leq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab}(1-ab) \geq 0$, luôn đúng.	0,25
Vậy phương trình xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.	0,25

----- Hết -----

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.