

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ BÀI

Câu 1. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \\ x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36 \end{cases}.$$

b) Cho (a_n) là một dãy các số thực thỏa mãn $a_0 = 1, a_1 = 2$ và $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = 2022$ với mọi $n \geq 1$. Đặt $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn và xác định giới hạn này.

Câu 2: Cho tam giác nhọn ABC không cân tại A , có trục tâm H . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AC , cắt đường tròn đường kính AC tại hai điểm D, E (D nằm giữa E và B) đồng thời cắt đường thẳng AC tại K . Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AB , cắt đường tròn đường kính AB tại hai điểm F, G (F nằm giữa C và G) đồng thời cắt đường thẳng AB tại L .

a) Chứng minh rằng bốn điểm D, F, E, G cùng nằm trên một đường tròn.

b) Giả sử $KL \cap BC = I$. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AI và cắt đường thẳng LC tại J . Chứng minh rằng H là trung điểm đoạn thẳng CJ .

Câu 3: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) + f(x) - f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Câu 4: Cho 2022 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ bất kỳ. Có tồn tại hay không vô hạn số nguyên dương $n \geq 2022$ thỏa mãn dãy 2022 số $a_1^n n^{a_1} + 1; a_2^n n^{a_2} + 1; \dots; a_{2022}^n n^{a_{2022}} + 1$ đều là hợp số không?

Câu 5: Cho bảng ô vuông kích thước 100×100 mà mỗi ô được điền một trong các ký tự A, B, C, D sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của bảng thì số lượng ký tự từng loại đúng bằng 25. Ta gọi hai ô thuộc cùng hàng (không nhất thiết kề nhau) nhưng được điền khác ký tự là “cặp tốt”, còn hình chữ nhật có các cạnh song song với bảng và bốn đỉnh của nó được điền đủ bốn ký tự A, B, C, D là “bảng tốt”.

a) Hỏi trong các cách điền ở trên, có bao nhiêu cách điền mà mỗi bảng ô vuông $1 \times 4, 4 \times 1$ và 2×2 đều có chứa đủ các ký tự A, B, C, D ?

b) Chứng minh rằng với mọi cách điền thỏa mãn đề bài thì trên bảng ô vuông đã cho:

i) Luôn có 2 cột của bảng mà từ đó có thể chọn ra được 76 cặp tốt.

ii) Luôn có một bảng tốt.

..... Hết.....

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.