

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I(2,0 điểm).

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm x để $P = \frac{1}{2}$.

Câu II(2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = (a-1)x + b - 2$ (a, b là tham số). Biết đường thẳng d song song với đường thẳng $d': y = 3x + 8$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính $T = a^2 + 2b^2$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$.

Câu III(2,0 điểm).

1. Giải phương trình $x^2 + 6x + 5 = 0$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$.

Câu IV(3,0 điểm).

Cho tam giác ABC không có góc tù ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O) (B, C cố định và A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M . Từ M kẻ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F , cắt AC tại I .

1. Chứng minh $MBOC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $FI \cdot FM = FD \cdot FE$

3. Tìm vị trí của đỉnh A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Câu V(1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{3a^2 + bc}{b+c} + \frac{3b^2 + ca}{c+a} + \frac{3c^2 + ab}{a+b} - 2\sqrt{a+b+c} \geq -2.$$

----- HẾT -----

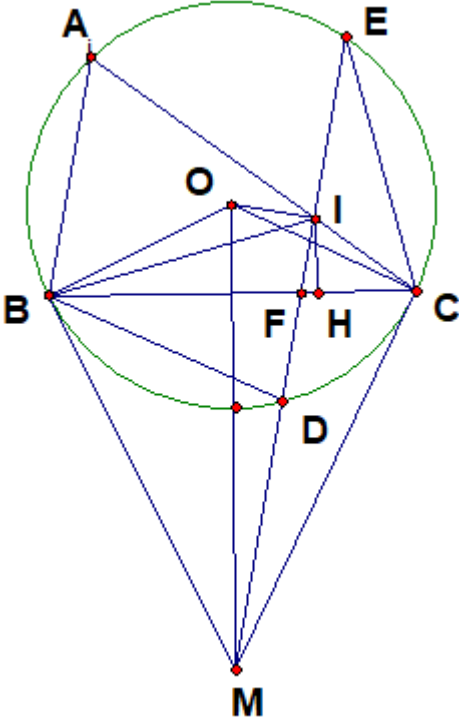
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

Câu	Ý	NỘI DUNG	Điểm
I (2,0đ)	1 (1,0đ)	Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0$. Rút gọn biểu thức P.	
		Với điều kiện $x \geq 0$, ta có $P = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,25
		$= \frac{x-2\sqrt{x}+3+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$= \frac{x-2\sqrt{x}+3+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$	0,25
		$= \frac{x-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$	0,25
		Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$	
II (2,0đ)	2 (1,0đ)	Tìm x để $P = \frac{1}{2}$	
		Với $x \geq 0$, ta có: $P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=2$	0,50
		$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn). Vậy $x=1$ là giá trị cần tìm.	0,50
II (2,0đ)	1 (1,0đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y = (a-1)x + b - 2$ (a, b là tham số). Biết đường thẳng d song song với đường thẳng $d': y = 3x + 8$ và đi qua điểm $A(2;3)$. Tính $T = a^2 + 2b^2$.	

		Đường thẳng d song song với đường thẳng $d': y = 3x + 8$, nên ta có $a - 1 = 3$ (1) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3)$, nên ta có $3 = (a - 1)2 + b - 2 \Leftrightarrow 2a + b = 7$ (2)	0,50
		Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} a - 1 = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$ Khi đó ta có $T = a^2 + 2b^2 = 16 + 2 = 18$.	0,50
	2 (1,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$	
		Ta có $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$	0,50
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; -2)$.	0,50
III (2,0đ)	1 (1,0đ)	Giải phương trình $x^2 + 6x + 5 = 0$.	
		Ta có : $a = 1; b = 6; c = 5$	0,50
		Ta thấy $a - b + c = 1 - 6 + 5 = 0$	
		Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = -5$.	0,50
	2 (1,0đ)	Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$.	
		Xét phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$ (1) Ta có $\Delta' = (m^2 - 2m + 1) - 2m + 5 = m^2 - 4m + 6 = (m - 2)^2 + 2 > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .	0,25
		Áp dụng định lí Viét cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (2) \\ x_1 x_2 = 2m - 5 & (3) \end{cases}$	
		Vì x_1 là nghiệm phương trình (1) nên: $x_1^2 - 2(m - 1)x_1 + 2m - 5 = 0$ $\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = -2x_1 + 4$ Tương tự ta có $x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1 = -2x_2 + 4$	0,25
		Khi đó $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$	0,25

		$\Leftrightarrow (-2x_1 + 4)(-2x_2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 4[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] < 0$ $\Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \quad (4)$	
		Thế (2) và (3) vào (4) ta được $2m - 5 - 2.2(m - 1) + 4 < 0 \Leftrightarrow -2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$ Vậy $m > \frac{3}{2}$.	0,25
IV (3,0đ)	Cho tam giác ABC không có góc tù ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O) (B, C cố định và A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M . Từ M kẻ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F , cắt AC tại I .		
			
	1 (1,0đ)	Chứng minh $MBOC$ là tứ giác nội tiếp. Xét tứ giác $MBOC$, ta có: $\widehat{MBO} = 90^\circ$ (vì MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B) $\widehat{MCO} = 90^\circ$ (vì MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C) Suy ra $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Vậy tứ giác $MBOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,50
	2	Chứng minh $FI.FM = FD.FE$	0,50

(1,0đ)	* Xét 2 tam giác: FBD và FEC, ta thấy: $\widehat{BFD} = \widehat{CFE}$ (đối đỉnh) $\widehat{DBF} = \widehat{CEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD) Suy ra $\triangle FBD$ đồng dạng với $\triangle FEC$ (g-g) Suy ra $\frac{FD}{FC} = \frac{FB}{FE} \Leftrightarrow FD.FE = FB.FC$ (1)	0,25
	* Xét tứ giác $MBIC$, ta có : $\widehat{MBC} = \widehat{BAC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\widehat{BAC} = \widehat{MIC}$ (đồng vị) Suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BIC}$ Ta thấy tứ giác $MBIC$ có hai đỉnh B và I cùng nhìn cạnh MC dưới một góc bằng nhau. Vậy tứ giác $MBIC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	* Xét 2 tam giác: FBM và FIC, ta thấy $\widehat{BFM} = \widehat{CFI}$ (đối đỉnh) $\widehat{MBF} = \widehat{FIC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC) Suy ra $\triangle FBM$ đồng dạng với $\triangle FIC$ (g-g) Suy ra $\frac{FB}{FI} = \frac{FM}{FC} \Leftrightarrow FI.FM = FB.FC$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2), ta suy ra $FI.FM = FD.FE$ (đpcm)	0,25
	Tìm vị trí của đỉnh A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.	
	Do tứ giác $MBOC$ và tứ giác $MBIC$ là hai tứ giác nội tiếp, suy ra 5 điểm M, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn	0,25
	Gọi H là hình chiếu của I lên BC, ta có diện tích tam giác IBC là: $S = \frac{1}{2} BC.IH$ Do BC không đổi nên diện tích tam giác IBC lớn nhất khi IH lớn nhất.	0,25
	Ta thấy, khi A chạy trên cung lớn BC thì I luôn thuộc đường tròn đường kính OM . Do đó IH lớn nhất khi I trùng với O hay AC là đường kính	0,25

		của đường tròn tâm (O).	
		Vậy khi A là điểm đối xứng với C qua O thì tam giác IBC có diện tích lớn nhất.	0,25
V (1,0đ)	Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng		
	$\frac{3a^2+bc}{b+c}+\frac{3b^2+ca}{c+a}+\frac{3c^2+ab}{a+b}-2\sqrt{a+b+c}\geq-2.$		
	(1,0đ)	Đặt $P=\frac{3a^2+bc}{b+c}+\frac{3b^2+ca}{c+a}+\frac{3c^2+ab}{a+b}-2\sqrt{a+b+c}$ $=\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}+\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-2\sqrt{a+b+c}$ Để chứng minh được với mọi số thực dương x,y,z ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=y=z$ Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$ $=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$ $=\frac{1}{2}\left((b+c)+(a+c)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\geq\frac{1}{2}.9-3=\frac{3}{2}.$ Khi đó $\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}$ $=\left(\frac{2a^2}{b+c}+2a\right)+\left(\frac{2b^2}{c+a}+2b\right)+\left(\frac{2c^2}{a+b}+2c\right)-2(a+b+c)$ $=2a\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+2b\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+2c\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-2(a+b+c)$ $=2(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-2(a+b+c)$ $\geq 2(a+b+c).\frac{3}{2}-2(a+b+c)=(a+b+c)$	0,25
		Ta có $\frac{a^2+bc}{b+c}+a=\frac{a^2+bc+ab+ac}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$ $\Rightarrow \frac{a^2+bc}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}-a$ Tương tự ta có: $\frac{b^2+ca}{c+a}=\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}-b; \frac{c^2+ab}{a+b}=\frac{(a+c)(c+b)}{a+b}-c$	0,25

	Khi đó $\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b}$ $= \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} - (a+b+c).$	
	ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} \geq 2(a+b)$ $\frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$ $\frac{(c+a)(c+b)}{a+b} + \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} \geq 2(c+a)$ $\Rightarrow 2 \left(\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \right) \geq 4(a+b+c)$ $\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+b+c)$	0,25
	$\Rightarrow P \geq 2(a+b+c) - 2\sqrt{a+b+c} = 2 \left(\sqrt{a+b+c} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} > -2.$ Vậy, với a, b, c là các số thực dương thì $\frac{3a^2+bc}{b+c} + \frac{3b^2+ca}{c+a} + \frac{3c^2+ab}{a+b} - 2\sqrt{a+b+c} \geq -2 \text{ (đpcm)}$	0,25

----- HẾT -----

Đáp án đã điều chỉnh (câu V thay $4\sqrt{a+b+c}$ bằng $2\sqrt{a+b+c}$)