

MÃ ĐỀ THI: xxx

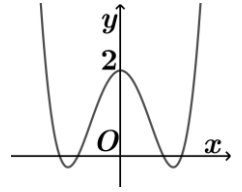
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi khảo sát có: 06 trang

1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ?

A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. B. $y = -x^4 + 3x^2 + 2$.

C. $y = x^4 - 3x^2 + 2$. D. $y = x^3 - 2x^2 - 2$.



2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_3 bằng

A. 32. B. 16. C. 8. D. 6.

3. Một tổ có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ để đi tập văn nghệ?

A. A_{11}^2 . B. 30. C. C_{11}^2 . D. 11.

4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 4x$ là

A. $2^x \ln 2 + 2x^2 + C$. B. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C$. C. $2^x \ln 2 + C$. D. $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.

5. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $3a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. a^3 . B. $4a^3$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $3a^3$.

6. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 8) = 2$ là

A. $x = -4$. B. $x = 12$. C. $x = 4$. D. $x = -\frac{4}{3}$.

7. Cho khối trụ có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng 2. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 8π . B. $8\sqrt{3}\pi$. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$. D. 24π .

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1		-3		$+\infty$

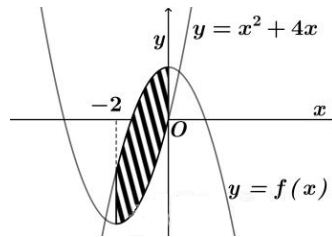
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$, $B(3; -4; 1)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(-2; 5; -3)$. B. $(2; 5; 3)$. C. $(2; -5; 3)$. D. $(2; 5; -3)$.

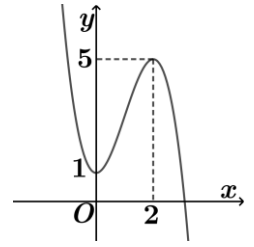
10. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ là
- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.
11. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $3a$ và bán kính đáy bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
- A. $12\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. πa^2 .
12. Với a là số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng
- A. $\frac{3}{4}$. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.
13. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $2a^3$. C. $4a^3$. D. a^3 .
14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng
- A. -4. B. 0. C. 5. D. -3.
15. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$ và $F(1) = 1$. Giá trị của $F(3)$ bằng
- A. 4. B. 2. C. -2. D. 3.
16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$ là
- A. $\frac{2x-1}{(2x^2-x+1)\ln 3}$. B. $\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)\ln 3}$. C. $\frac{(4x-1)\ln 3}{2x^2-x+1}$. D. $\frac{4x-1}{2x^2-x+1}$.
17. Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$, diện tích hình phẳng (H) là

- A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.
18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;0)$ và $B(3;5;-2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là
- A. $(2;2;-1)$. B. $(2;6;-2)$. C. $(4;4;-2)$. D. $(1;3;-1)$.

19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ba điểm phân biệt là

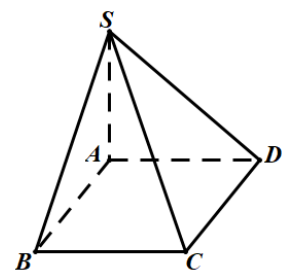


- A. Vô số. B. 3.
C. 0. D. 5.
20. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x^2-2x} \geq 64$ là
A. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $[-1; 3]$.
21. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng
A. $\sqrt{2}\pi a^2$. B. $\frac{\pi a^2}{2}$. C. πa^2 . D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.
22. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng
A. $\frac{3}{2}$. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.
23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+		-		+	
y			$+\infty$	4	$-\infty$	$+\infty$	

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
24. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là
A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
A. 30° . B. 45° .
C. 60° . D. 90° .

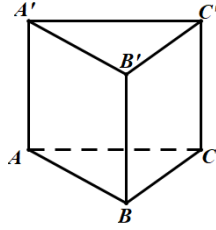


26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+3)(x-1)^2$. Số điểm cực trị của hàm số bằng
A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

27. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{\cos^2 x} \right)$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ là

- A. $-\frac{1}{x^2} + \tan x + C$. B. $\ln x + \tan x + C$. C. $-\frac{1}{x^2} - \tan x + C$. D. $\ln x - \tan x + C$.

28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, $AA' = 2a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

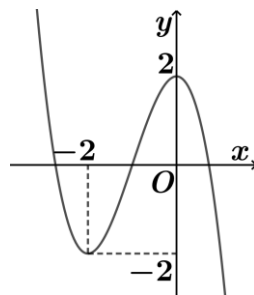
- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.
29. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Côsin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. $-\frac{1}{2\sqrt{7}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$. C. $-\frac{3}{2\sqrt{7}}$. D. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.
30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		5		$+\infty$	
		-4		-4		

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 11 = 0$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 4.
31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn OA . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng
- A. $\frac{9\sqrt{22}a}{44}$. B. $\frac{3\sqrt{22}a}{11}$. C. $\frac{\sqrt{22}a}{11}$. D. $\frac{3\sqrt{22}a}{44}$.
32. Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực phân biệt là
- A. 7. B. 9. C. 8. D. 1.
33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 4; -3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là
- A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 29$.
C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 9$. D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 16$.

34. Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn $3C_n^2 - C_n^3 = 24$. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ bằng
- A. $672x^{12}$. B. $-672x^{12}$. C. 672 . D. -672 .
35. Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng
- A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$. C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.
36. Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 + (m-2)x + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là
- A. 3. B. 0. C. 4. D. 2.
37. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng
- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.
38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; -2; 5)$. Phương trình của mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc trục Oy là
- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 22 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 22 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 26 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 26 = 0$.
39. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$, $\forall x \neq 0$. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx$ bằng
- A. $6 - e^2$. B. $\frac{6 - e^2}{2}$. C. $9 - e^2$. D. $\frac{9 - e^2}{2}$.
40. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

41. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

- A. 2020. B. 9. C. 2019. D. 10.

42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5$, $f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

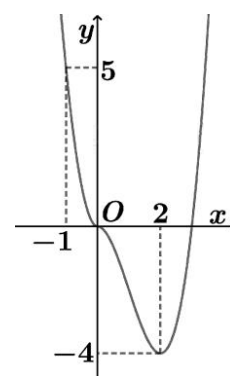
Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

- A. 16. B. 17. C. 0. D. 15.

43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1$, $f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m > 0$. B. $m > 3 - \frac{1}{e^2}$.

- C. $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. D. $m \geq 0$.



44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$.

Biết $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB , góc giữa (SAC) và đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC bằng

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

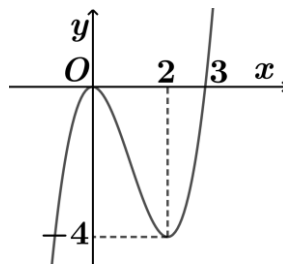
$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

47. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. B. $2\sqrt{10}\pi a^2$. C. $\sqrt{10}\pi a^2$. D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.

48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
49. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.
50. Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H) . Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng

- A. $\frac{39}{140}$. B. $\frac{39}{58}$. C. $\frac{45}{58}$. D. $\frac{39}{280}$.

----- HẾT -----

Lời giải đề thi khảo sát tỉnh Phú Thọ

LỚP CHUYÊN TOÁN KHÓA 36 ^{*†}

Ngày 17 tháng 5 năm 2020

"The Only Way To Learn Mathematics Is To Do Mathematics"

— Paul Halmos

Tập thể lớp chuyên Toán khóa 36, trường THPT chuyên Hùng Vương xin giới thiệu tới bạn đọc và các quý thầy cô đề thi và lời giải môn Toán cho kì thi khảo sát khối 12 của tỉnh Phú Thọ diễn ra vài ngày trước. Mặc dù tỉnh có thu lại đề nhưng nhóm tác giả vẫn *lượm* được trên mạng đề để giải. Đồng thời nhóm tác giả muốn xin đề đạt với các thầy ở Sở giáo dục là sau mỗi cuộc thi thì nên cho các bạn học sinh cầm đề và nháp về để trao đổi, rút ra kinh nghiệm thêm cho bản thân và để làm tài liệu cho các khóa sau này. Trong tài liệu có thể có lỗi soạn thảo hoặc nội dung, các tác giả rất mong muốn được trao đổi thêm với bạn đọc.

Tài liệu này là thành quả của nhóm tác giả và được chia sẻ công khai tới cộng đồng, tất cả hoạt động mua bán hay kinh doanh mà không có sự cho phép của các tác giả là trái pháp luật.

Mục lục

1 Bình luận chung	1
2 Đề bài	2
3 Lời giải chi tiết	11

§1 Bình luận chung

Đề thi lần này sát với cấu trúc đề minh họa, các câu lý thuyết hay vận dụng các tính chất cơ bản chiếm khoảng 50% đề thi và đủ các dạng bài. Đây là một con số phù hợp để các bạn học sinh trung bình có thể đạt được 5 – 6 điểm. Đề thi cũng có nhiều câu có độ khó cao hơn và nhiều câu để thực sự phân loại học sinh (điểm 9 - 10). Các mảng kiến thức chủ yếu ở các câu này liên quan hàm số, nguyên hàm, tích phân và hình học không gian. Để đạt được 8 điểm thì cũng đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng khá chắc tay và đòi hỏi thêm tính toán cẩn thận. Còn muốn với tới được 9 – 10 thì học sinh cũng gặp không ít khó khăn, các bạn học sinh vừa cần cẩn thận những câu dễ mà lại phải nhanh

*Email: 10toancutee@gmail.com

†Facebook: [Mười Một Toán](#)

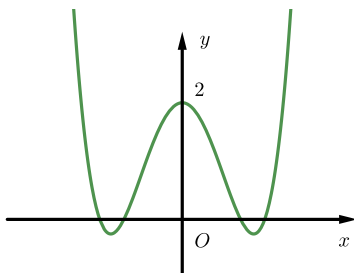
để chiến đấu với các câu còn lại có mức tính toán nhiều hơn, con số học sinh đạt được thang điểm này là không nhiều.

Nhìn chung đề thi đáp ứng được các loại đối tượng học sinh, giúp phân loại học sinh khá tốt. Mong điểm trung bình trong của toàn tỉnh sẽ là 6 hoặc có thể cao hơn thì là điều đáng mừng. ❤

§2 Đề thi

Kì thi có nhiều mã đề nhưng có lẽ chỉ thay đổi số liệu, trộn câu.

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ



- A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.
 B. $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. D. $y = x^3 - 2x^2 - 2$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_3 bằng

- A. 32. B. 16. C. 8. D. 6.

Câu 3. Một tổ có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ để đi tập văn nghệ ?

- A. A_{11}^2 . B. 30. C. C_{11}^2 . D. 11.

Câu 4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 4x$ là

- A. $2^x \ln 2 + 2x^2 + C$. C. $2^x \ln 2 + C$.
 B. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C$. D. $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 5. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. a^3 . B. $4a^3$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $3a^3$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 8) = 2$ là

- A. $x = -4$. B. $x = 12$. C. $x = 4$. D. $x = \frac{-4}{3}$.

Câu 7. Cho khối trụ có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng 2. Thể tích của khối trụ đã cho là

- A. 8π . B. $8\sqrt{3}\pi$. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$. D. 24π .

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	-3

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.
- Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 1; -2)$, $B(3; -4; 1)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là
- A. $(-2; 5; -3)$. B. $(2; 5; 3)$. C. $(2; -5; 3)$. D. $(2; 5; -3)$.
- Câu 10.** Phương trình tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ là
- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 11. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $3a$ và bán kính đáy là bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $12\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. πa^2 .

Câu 12. Với a là một số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. 3 . C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 13. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $2a^3$. C. $4a^3$. D. a^3 .

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ trên khoảng $[1; 2]$ bằng

- A. -4 . B. 0 . C. 5 . D. -3 .

Câu 15. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$ và $F(1) = 1$, giá trị $F(3)$ bằng

- A. 4 . B. 2 . C. -2 . D. 3 .

Câu 16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$ là

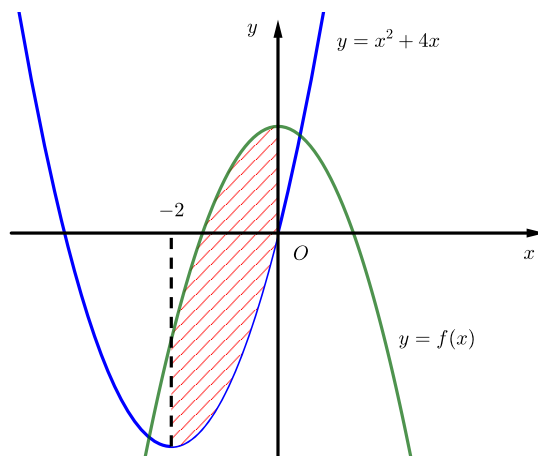
A. $\frac{2x-1}{(2x^2-x+1)\ln 3}$.

C. $\frac{(4x-1)\ln 3}{2x^2-x+1}$.

B. $\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)\ln 3}$.

D. $\frac{4x-1}{2x^2-x+1}$.

Câu 17. Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$, diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 1; 0)$ và $B(3; 5; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

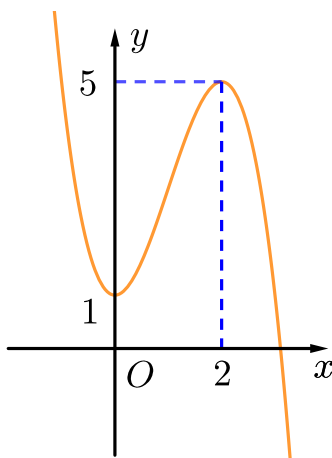
A. $(2; 2; -1)$.

B. $(2; 6; -2)$.

C. $(4; 4; -2)$.

D. $(1; 3; -1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ba điểm phân biệt là

- A. Vô số. B. 3. C. 0. D. 5.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x^2-2x} \geq 64$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. C. $(-\infty; -1]$.
B. $[3; +\infty)$. D. $[-1; 3]$.

Câu 21. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $\sqrt{2}\pi a^2$. B. $\frac{\pi a^2}{2}$. C. πa^2 . D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+		-		+	
			$+\infty$		4		$+\infty$
y	3	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
					-5		

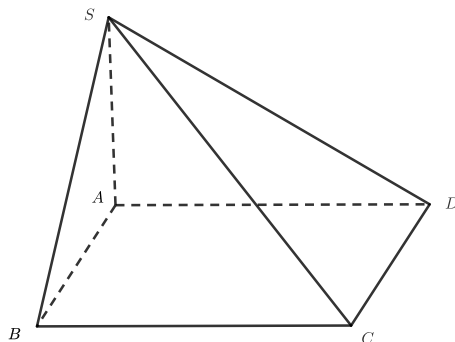
Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy cạnh hình vuông là a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+3)(x-1)^2$. Số điểm cực đại của hàm số bằng

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 27. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là

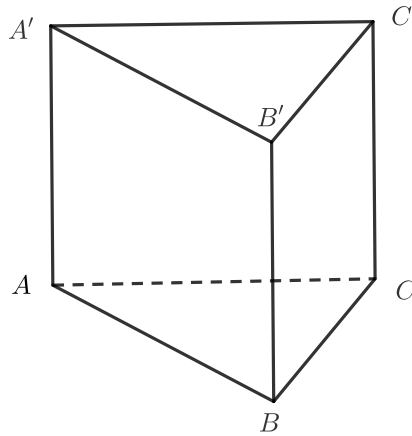
A. $-\frac{1}{x^2} + \tan x + C$.

C. $-\frac{1}{x^2} - \tan x + C$.

B. $\ln x + \tan x + C$.

D. $\ln x - \tan x + C$.

Câu 28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, $AA' = 2a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}a^3$.

B. $4\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $-\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

C. $-\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

D. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			5				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-4		-4			

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 11 = 0$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm đoạn thẳng OA . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{9\sqrt{22}a}{44}$.

B. $\frac{3\sqrt{22}a}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{22}a}{11}$.

D. $\frac{3\sqrt{22}a}{44}$.

Câu 32. Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. 1.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 4; -3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 4$.

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 9$.

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 29$.

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 16$.

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn $3C_n^2 - C_n^3 = 24$. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ bằng

A. $672x^{12}$.

B. $-672x^{12}$.

C. 672.

D. -672 .

Câu 35. Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$

và $f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 + (m-2)x + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. 3.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Câu 37. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; -2; 5)$. Phương trình đã cho của mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc trục Oy là

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 22 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 26 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 22 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 26 = 0$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}, \forall x \neq 0$. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx$ bằng

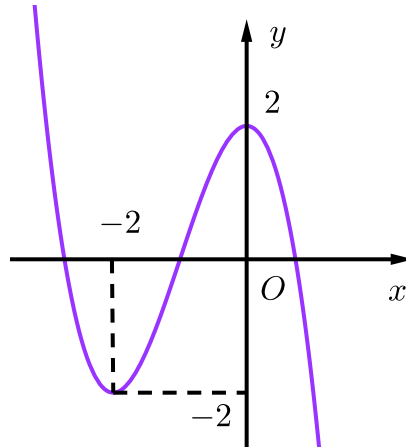
A. $6 - e^2$.

B. $\frac{6 - e^2}{2}$.

C. $9 - e^2$.

D. $\frac{9 - e^2}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

A. 1.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020.

B. 9.

C. 2019.

D. 10.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

A. 16.

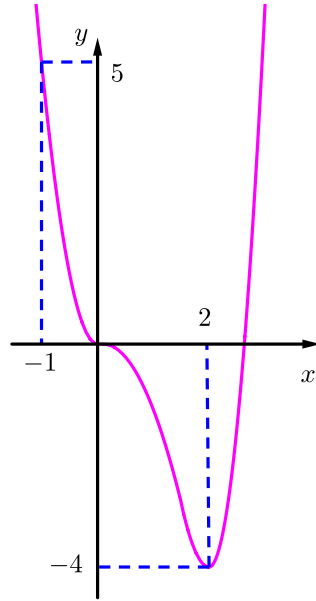
B. 17.

C. 0.

D. 15.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1, f\left(\frac{-1}{e}\right) = 2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi



- A. $m > 0$. B. $m > 3 - \frac{1}{e^2}$. C. $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. D. $m \geq 0$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB , góc giữa (SAC) và đáy là 45° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD . Khoảng cách giữa đường thẳng AM và SC là

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

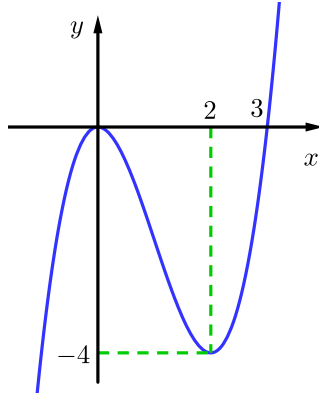
Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x})dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 47. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. B. $2\sqrt{10}\pi a^2$. C. $\sqrt{10}\pi a^2$. D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

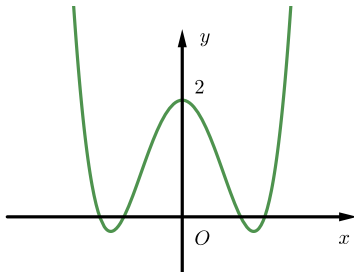
Câu 50. Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H) . Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng

- A. $\frac{39}{140}$. B. $\frac{39}{58}$. C. $\frac{45}{58}$. D. $\frac{39}{280}$.

— HẾT —

§3 Lời giải chi tiết

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ



- A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.
 B. $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. D. $y = x^3 - 2x^2 - 2$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Hướng 1. Ta kí hiệu hàm số trên là $f(x)$. Từ đồ thị ta thấy khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ nên nếu hàm số trên là một đa thức thì hệ số bậc cao nhất là số dương nên còn hai đáp án là **C** hoặc **D**.

Kết hợp $f(0) = 2$ thì ta rút ra được đáp án **C**. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Hướng 2. Nhìn vào đồ thị thì thấy nó đối xứng qua trục tung nên nếu $f(x)$ là đa thức thì nó phải bao gồm tổng lũy thừa bậc chẵn, kết hợp tính chất khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ nên suy ra ta còn đáp án **C**. $\square$

Claim 3.1 — Ở bài toán này nhắc lại cho chúng ta hai tính chất sau

Cho $f(x)$ là đa thức viết dưới dạng $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Khi đó nếu $a_n > 0$ thì $x \rightarrow +\infty$ sẽ suy ra $y \rightarrow +\infty$ và nếu $a_n < 0$ thì khi $x \rightarrow +\infty$ sẽ suy ra $y \rightarrow -\infty$.

Và nếu $f(x) = f(-x)$ tại vô số điểm thì các hệ số bậc lẻ $a_i = 0$ (i lẻ).

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_3 bằng

- A. 32. B. 16. C. 8. D. 6.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Cách tính như sau: $u_3 = 4 \times u_2 = 4^2 \times u_1 = 16 \times 2 = 32$. $\square$

Claim 3.2 — Với cấp số nhân (u_n) có $u_1 = a$ và công bội q thì với mọi số nguyên dương n , ta có các tính chất sau:

1. $u_n = q^{n-1} \cdot a$.
2. $u_{n+2} \cdot u_n = u_{n+1}^2$.

$$3. S_n = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ với } q \neq 1.$$

Câu 3. Một tổ có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn một học sinh nam và một học sinh nữ để đi tập văn nghệ ?

A. A_{11}^2 .

B. 30.

C. C_{11}^2 .

D. 11.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Trước tiên để chọn một học sinh nam trong 6 học sinh nam thì có 6 cách chọn, sau đó chọn một học sinh nữ trong 5 học sinh nữ thì có 5 cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì số cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài là $6 \times 5 = 30$ (cách chọn). $\square$

Claim 3.3 — Quy tắc cộng và quy tắc nhân có thể hiểu đơn giản như sau:

Nếu một công việc được chia ra làm hai giai đoạn, giai đoạn đầu có a hướng xử lí, giai đoạn hai có b hướng xử lí thì số hướng xử lí công việc là $a \times b$ (quy tắc nhân).

Còn một công việc mà người A có a cách xử lí, người B có b cách xử lí thì tổng số cách xử lí sẽ là $a + b$ (quy tắc cộng).

Câu 4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 4x$ là

A. $2^x \ln 2 + 2x^2 + C$.

C. $2^x \ln 2 + C$.

B. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C$.

D. $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Áp dụng công thức tính nguyên hàm ta có

$$\int (2^x + 4x) dx = \int 2^x dx + \int 4x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C.$$

Nếu bạn nào còn quên công thức nguyên hàm thì có thể tính đạo hàm của từng đáp án đã cho và sẽ đi đến kết quả **B**. $\square$

Câu 5. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. a^3 .

B. $4a^3$.

C. $\frac{4}{3}a^3$.

D. $3a^3$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ, ta có

$$V = S \cdot h = a^2 \cdot 3a = 3a^3.$$

$\square$

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 8) = 2$ là

- A. $x = -4$. B. $x = 12$. C. $x = 4$. D. $x = \frac{-4}{3}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Từ giả thiết $\log_2(3x - 8) = 2$ thì suy ra $3x - 8 = 2^2$ hay ta có $x = 4$. □

Câu 7. Cho khối trụ có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng 2. Thể tích của khối trụ đã cho là

- A. 8π . B. $8\sqrt{3}\pi$. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$. D. 24π .

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ thì ta có

$$V = S \cdot h = (\pi \cdot 2^2) \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\pi.$$

□

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
y	$-\infty$			-3			

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy y' mang dấu dương ở hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ nên ta chọn đáp án **A**.

Nhận xét. Bảng biến thiên có vẻ cho hơi thừa, mục đích chủ yếu để nhìn cho đẹp mắt vì thực tế ta chỉ cần dựa vào y' hoặc y trong bảng là có thể ra được kết quả. □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 1; -2)$, $B(3; -4; 1)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-2; 5; -3)$. B. $(2; 5; 3)$. C. $(2; -5; 3)$. D. $(2; 5; -3)$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2; -5; 3)$. □

Câu 10. Phương trình tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ là

- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C** □

Với số thực $a \neq 1$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2a-3}{a-1}$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x-1} = \infty$ nên ta có kết luận $x = 1$ là phương trình tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên.

Claim 3.4 — Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là $x = \frac{-d}{c}$.

Ta còn có thể rút ra tính chất nếu $f(x)$ là tổng các phân thức, khi đó tập hợp các số thực phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $x = a_i, i = \overline{1, n}$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$ thì tại các điểm x_i thì $f(x_i)$ không xác định.

Câu 11. Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $3a$ và bán kính đáy là bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $12\pi a^2$. B. $3\pi a^2$. C. $6\pi a^2$. D. πa^2 .

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Ta có diện tích xung quanh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi \times a \times 3a = 3\pi a^2.$$

(trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh hình nón, r là độ dài bán kính đáy và l là độ dài đường sinh) □

Câu 12. Với a là một số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta có

$$\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_{a^2}\left(a^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4}.$$

□

Claim 3.5 — Với a, b là các số thực dương (a khác 1) và x, y là hai số thực tùy ý (x khác 0). Khi đó $\log_{a^x}(b^y) = \frac{y}{x} \cdot \log_a(b)$.

Câu 13. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{2a^3}{3}$.

B. $2a^3$.

C. $4a^3$.

D. a^3 .

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp ta có

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times a^2 \times 2a = \frac{2}{3}a^3.$$

Trong đó B là diện tích đáy, h là chiều cao. □

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ trên khoảng $[1; 2]$ bằng

A. -4 .

B. 0 .

C. 5 .

D. -3 .

Lời giải. Đáp án đúng: **A** □

Hướng 1. Xét $f'(x) = (x^4 - 2x^2 - 3)' = 4x(x^2 - 1)$, mà ta đang xét x trong khoảng $[1; 2]$ nên $f'(x) \geq 0$ hay hàm số đồng biến trên $[1; 2]$.

Vậy suy ra $\min_{x \in [1; 2]} f(x) = f(1) = -4$.

Hướng 2. Chúng ta sẽ dùng mẹo bấm máy tính như sau

Đầu tiên ta nhập $x^4 - 2x^2 - 3 = A$, trong đó A là biến số mà ta sẽ nhập vào 1 trong 4 kết quả của đáp án của đề bài.

Trước tiên, đề hỏi là giá trị nhỏ nhất nên ta thử lần lượt từ số bé đến số lớn, cụ thể ta nhập A lần lượt là các giá trị $-4, -3, 0, 5$ và để khởi chạy $x = \frac{3}{2}$ (nằm giữa đoạn $[1, 2]$ vì máy tính sẽ chạy các số sang hai bên của điểm bắt đầu). Sau đó nếu phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm ngoài đoạn $[1; 2]$ thì ta lại thay A là các số tiếp theo vào. Đến khi phương trình đó có nghiệm thuộc $[1; 2]$ thì giá trị A mà ta đang thử chính là đáp số cần tìm. Và may mắn ở bài này là ta thử thì chỉ cần 1 trường hợp là ra -4 .

Phương pháp bấm máy này sẽ hiệu quả hơn ở một số câu phức tạp mà tiêu chí thì là cần nhanh và chính xác thì nên dùng cách này vì máy tính bây giờ cũng rất hiện đại, nhanh ra kết quả.

Câu 15. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$ và $F(1) = 1$, giá trị $F(3)$ bằng

A. 4 .

B. 2 .

C. -2 .

D. 3 .

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta có

$$\int_1^3 f(x)dx = F(3) - F(1) = 3$$

nên giá trị $F(3) = 4$. □

Claim 3.6 — Công thức **Newton - Leibniz**

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $[a; b]$ và tồn tại $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Câu 16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$ là

A. $\frac{2x - 1}{(2x^2 - x + 1) \ln 3}.$

C. $\frac{(4x - 1) \ln 3}{2x^2 - x + 1}.$

B. $\frac{4x - 1}{(2x^2 - x + 1) \ln 3}.$

D. $\frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1}.$

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Theo công thức tính đạo hàm thì

$$y' = (\log_3(2x^2 - x + 1))' = \frac{(2x^2 - x + 1)'}{(2x^2 - x + 1) \ln 3} = \frac{4x - 1}{(2x^2 - x + 1) \ln 3}.$$

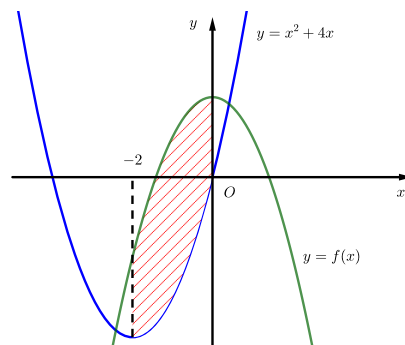
□

Claim 3.7 — Công thức tính đạo hàm của hàm số hợp như sau

$$h(g(x))' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

và kết hợp công thức $\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$ để ra biến đổi như trên.

Câu 17. Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$, diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\frac{7}{3}.$

B. $\frac{16}{3}.$

C. $\frac{4}{3}.$

D. $\frac{20}{3}.$

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta kí hiệu $g(x)$ là hàm số $x^2 + 4x$, khi đó họ các nguyên hàm của hàm số $g(x)$ sẽ là $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$ nên $\int_{-2}^0 g(x)dx = \frac{-16}{3}$.

Và ta có diện tích phần gạch chéo có công thức là

$$S_{\text{red}} = \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{-2}^0 f(x) - \int_{-2}^0 g(x) \right| = \left| \frac{4}{3} - \frac{-16}{3} \right| = \frac{20}{3}.$$

□

Claim 3.8 — Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng được dưới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 1; 0)$ và $B(3; 5; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

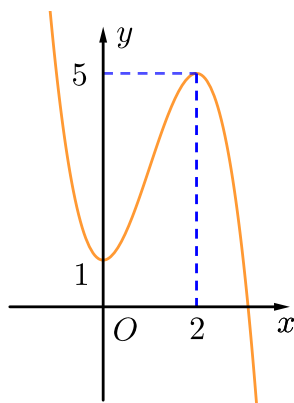
- A. $(2; 2; -1)$. B. $(2; 6; -2)$. C. $(4; 4; -2)$. D. $(1; 3; -1)$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Tọa độ trung điểm AB được cho bởi công thức: $M_{AB} \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Thay số liệu vào ta sẽ có $M_{AB}(1; 3; -1)$. □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại ba điểm phân biệt là

- A. Vô số. B. 3. C. 0. D. 5.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Dựa vào hình vẽ của đồ thị ta thấy

Với $m < 1$ thì ta thấy đường thẳng $y = m$ chỉ có thể cắt đồ thị tại một điểm, tương tự với $m > 5$.

Với $m = 1$ hoặc $m = 5$ thì đường thẳng $y = m$ sẽ cắt đồ thị trên tại hai điểm, một trong số đó là điểm tiếp xúc, cụ thể với $m = 1$ thì điểm tiếp xúc là $(0; 1)$ và $m = 5$ thì điểm tiếp xúc là $(2; 5)$.

Còn với $1 < m < 5$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt, kết hợp m nguyên nên có ba giá trị thỏa mãn là $\{2, 3, 4\}$. $\square$

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x^2-2x} \geq 64$ là

- A. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. C. $(-\infty; -1]$.
B. $[3; +\infty)$. D. $[-1; 3]$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta viết lại bất phương trình dưới dạng $4^{x^2-2x} \geq 64 = 4^3$, tương đương với $x^2 - 2x \geq 3$ hay ta có $(x - 3)(x + 1) \geq 0$.

Vậy từ đó ta rút ra được $x \geq 3$ hoặc $x \leq -1$ nên ta chọn đáp án **A**. $\square$

Câu 21. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $\sqrt{2}\pi a^2$. B. $\frac{\pi a^2}{2}$. C. πa^2 . D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Do thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền là $a\sqrt{2}$ nên bán kính của mặt đáy là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh của hình nón là cạnh của tam giác vuông cân.

Áp dụng định lý Pythagore thì ta tính được cạnh của tam giác vuông cân có độ dài là a nên suy ra diện tích xung quanh mặt nón là

$$S = \pi r l = \pi \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times a = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}.$$

$\square$

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Ta viết lại biểu thức đã cho như sau $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$. Dễ thấy hàm số này nghịch biến trên $[-1; 0]$ nên đạt giá trị lớn nhất nhỏ nhất tại hai biên.

Suy ra tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 0]$ là $f(-1) \times f(0) = -\frac{1}{2}$. $\square$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$
		$+\infty 4$			$+\infty$
y	3	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Ta thấy khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow 3$ và $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$. Suy ra đồ thị có một tiệm cận ngang là $y = 3$.

Khi $x \rightarrow -1^-$ thì $y \rightarrow +\infty$ nhưng $x \rightarrow -1^+$ thì $y \rightarrow 4$ nên $x = -1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Khi $x \rightarrow 2$ thì $y \rightarrow -5$ nên $x = 2$ cũng không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy ta kết luận chỉ có đúng một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 3$. $\square$

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Hướng 1. Ta xét hàm số $f(x) = \log_3(x+2) + \log_3(x-2) - \log_3 5$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

Dễ thấy hàm số này đồng biến trên $(2; +\infty)$ mà $x \rightarrow 2^+$ thì $f(x) \rightarrow -\infty$ và $f(7) = \log_3(9) + \log_3(5) - \log_3(5) = 2 > 0$.

Theo định lý giá trị trung gian thì tồn tại số $c \in (2; 7)$ sao cho $f(c) = 0$. Do $f(x)$ đồng biến nên nghiệm c là duy nhất. Cụ thể ở đây $c = 3$.

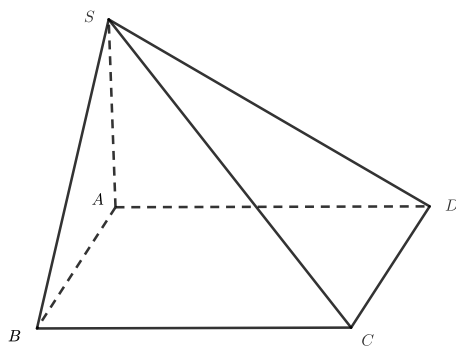
Hướng 2. Ta nhập phương trình vào máy tính rồi **Shift + Solve** để tìm nghiệm, nếu vô nghiệm thì xong luôn, nếu có nghiệm x_0 thì ta lưu vào phím **A**. Sau đó lại viết phương trình dưới dạng sau $\frac{\log_3(x+2) + \log_3(x-2) - \log_3 5}{x-A} = 0$ sau đó lại giải tiếp.

Viết phương trình như trên để máy tính sẽ chạy tránh nghiệm **A** vừa tìm. Cứ tiếp tục nếu ra nghiệm **B, C, ...** thì ta lại viết thêm biểu thức $(x-B)(x-C)$ ở dưới mẫu, cách này giúp ta vét hết các nghiệm phân biệt của phương trình ban đầu. $\square$

Claim 3.9 — Định lý **Bolzano** (giá trị trung gian)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại một hằng số $c \in (a; b)$ thỏa mãn $f(c) = 0$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy cạnh hình vuông là a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Do SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\angle SCA = \varphi$.

Theo định lý Pythagore ta tính được cạnh $AC = a\sqrt{2}$, mà $\tan \varphi = \frac{AS}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$ nên $\varphi = 45^\circ$. $\square$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+3)(x-1)^2$. Số điểm cực đại của hàm số bằng

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta thấy $f(x) = x(x+3)(x-1)^2$ đổi dấu từ dương sang âm khi x chạy qua điểm -3 nên -3 là điểm cực đại của hàm số.

Còn khi x chạy qua 0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên 0 là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. $\square$

Claim 3.10 — Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Xét số c bất kì thuộc khoảng $(a; b)$. Cho x chạy qua c (từ c^- đến c^+)

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì c là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì c là điểm cực đại của hàm số.

Câu 27. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là

A. $-\frac{1}{x^2} + \tan x + C.$

C. $-\frac{1}{x^2} - \tan x + C.$

B. $\ln x + \tan x + C.$

D. $\ln x - \tan x + C.$

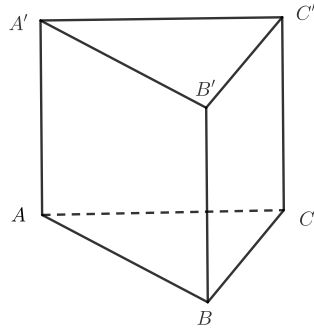
Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Ta có

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \ln x + \tan x + C.$$

□

Câu 28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$, $AA' = 2a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}a^3.$

B. $4\sqrt{3}a^3.$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}.$

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Theo định lý Pythagore thì ta tính được $BC = 2a$. Từ đó suy ra thể tích khối lăng trụ đứng là

$$V = S_{ABC} \times AA' = a^2 \times 2a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3.$$

□

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $-\frac{1}{2\sqrt{7}}.$

B. $\frac{1}{2\sqrt{7}}.$

C. $-\frac{3}{2\sqrt{7}}.$

D. $\frac{3}{2\sqrt{7}}.$

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta có công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{7}}.$$

Trong đó $\|\vec{a}\|$ là độ dài của $\vec{a}$. □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		5		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			-4		-4

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 11 = 0$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Phương trình trên tương đương với $f(x) = \frac{11}{2} = 5,5$. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy

- Khi $x \in (-\infty; -\sqrt{6})$ thì $f(x)$ nghịch biến từ $+\infty$ đến -4 nên phương trình sẽ có đúng một nghiệm trong khoảng $(-\infty; -\sqrt{6})$.
- Khi $x \in [-\sqrt{6}; 0]$ thì $f(x)$ đồng biến đi từ -4 đến 5 nên phương trình trên không có nghiệm trong đoạn $[-\sqrt{6}; 0]$.
- Tương tự thì phương trình không có nghiệm trong đoạn $[0; \sqrt{6}]$.
- Cuối cùng khi $x \in [\sqrt{6}; +\infty)$ thì $f(x)$ đồng biến chạy từ -4 ra $+\infty$ nên phương trình có thêm một nghiệm nữa.

Vậy kết luận là phương trình ban đầu có hai nghiệm. □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm đoạn thẳng OA . Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{9\sqrt{22}a}{44}$. B. $\frac{3\sqrt{22}a}{11}$. C. $\frac{\sqrt{22}a}{11}$. D. $\frac{3\sqrt{22}a}{44}$.

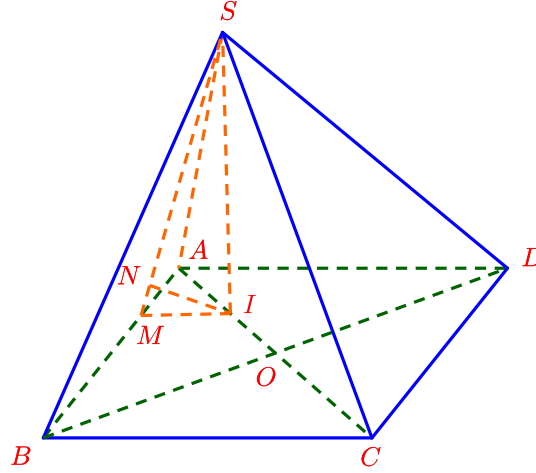
Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Ta gọi I là trung điểm OA , theo đề bài thì ta có $SI \perp AC$. Lấy M, N lần lượt là hình chiếu của I lên AB và SM .

Trước tiên ta tính được $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3}a$.

Theo giả thiết ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, CI) = \angle SCI = 30^\circ$ nên $SI = IC \cdot \tan 30^\circ = \frac{3}{4}a$.

Nhận thấy rằng $IM \parallel BC$ vì cùng vuông góc với AB nên theo định lý Thales thì ta có $IM = BC \cdot \frac{AI}{AC} = \frac{BC}{4} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.



Từ đó áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SIM ta có $\frac{1}{IN^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{SI^2}$ và ta tính được $IN = \frac{3a\sqrt{22}}{44}$.

Suy ra ta có

$$d(C, (SAB)) = \frac{CA}{IA} \cdot d(I, (SAB)) = 4IN = \frac{3\sqrt{22}a}{11}.$$

□

Claim 3.11 — Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B bất kì

- Nếu AB song song với (P) thì hiển nhiên $d(A, (P)) = d(B, (P))$.
- Nếu AB cắt mặt phẳng (P) tại S thì khi đó $\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{SA}{SB}$.

Câu 32. Cho phương trình $16x^2 - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$ (m là tham số). Số giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. 1.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta viết lại phương trình ban đầu dưới dạng $t^2 - 8t + 10 = m$, trong đó $t = 4^{x^2}$.

Để phương trình ban đầu có đúng hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình ẩn t có đúng một nghiệm $t > 1$, ngược lại nếu $t = 1$ thì chỉ có nghiệm $x = 0$ và $t < 1$ thì phương trình ẩn x vô nghiệm.

Hướng 1. Xét $f(t) = t^2 - 8t + 10 - m$ và ta có $\Delta_t = (-8)^2 - 4(10 - m) = 24 + 4m > 0$, suy ra $m \geq -5$.

Kết hợp điều kiện có đúng một nghiệm lớn hơn 1 thì ta sẽ có

$$\frac{8 + \sqrt{24 + 4m}}{2} > 1 > \frac{8 - \sqrt{24 + 4m}}{2}.$$

Giải bất phương trình trên ta sẽ thu được $m \geq 4$. Vậy có tổng cộng 7 giá trị của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hướng 2. Xét $g(t) = t^2 - 8t + 10$ Ta tính $g'(t) = 2(t - 4) = 0 \iff t = 4$. Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	$+\infty$			
		$\searrow$		$\nearrow$
		3		$+\infty$
			$\searrow$	
			-6	

Do đó để phương trình trên có đúng một nghiệm $t > 1$ thì $m > 3$, suy ra có 7 giá trị thỏa mãn. $\square$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 4; -3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là

- A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 4$. C. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 9$.
 B. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 29$. D. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 16$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Giả sử mặt cầu thỏa mãn đề bài có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) tại điểm S thì khi đó S là hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxz) và do S nằm trên (Oxz) nên $y_S = 0$.

Do đó $R = SI = |y_I - y_S| = 4$ (trong đó R là bán kính của mặt cầu).

Suy ra phương trình mặt cầu khi biết tâm $I(2; 4; -3)$ và bán kính bằng 4 là

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 3)^2 = 4^2 = 16.$$

$\square$

Claim 3.12 — Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm I bất kì không nằm trên mặt phẳng (Oxz) thì mặt cầu có tâm (I) và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) tại điểm S thì S sẽ là hình chiếu của I lên (Oxz) .

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương thỏa mãn $3C_n^2 - C_n^3 = 24$. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển $\left(x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ bằng

- A. $672x^{12}$. B. $-672x^{12}$. C. 672. D. -672.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Trước hết phương trình $3C_n^2 - C_n^3 = 24$ tương đương với $\frac{3n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 24$ và giải ra ta được $n = 9$.

Áp dụng khai triển nhị thức Newton thì ta có đơn thức chứa x^{12} có dạng

$$C_9^k (x^2 \sqrt{x})^k \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^{9-k}.$$

Đồng nhất số mũ của x thì $k = 6$, thay lại ta có hệ số của x^{12} là -672 . $\square$

Câu 35. Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Ta viết lại giả thiết như sau

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Suy ra

$$2\sqrt{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

Ta thay $x = 0$ vào phương trình trên ta được $C = 2\ln 2$. Sau đó lại cho $x = 3$ vào ta thu được $2\sqrt{f(3)} = \ln 4 - \ln 5 + 2\ln 2 = 4\ln 2 - \ln 5$, suy ra $f(3) = \frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. $\square$

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 + (m-2)x + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. 3.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Ta lấy đạo hàm của hàm số y là $y' = 3x^2 + 2(m-2)x + (m-2)$, để hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

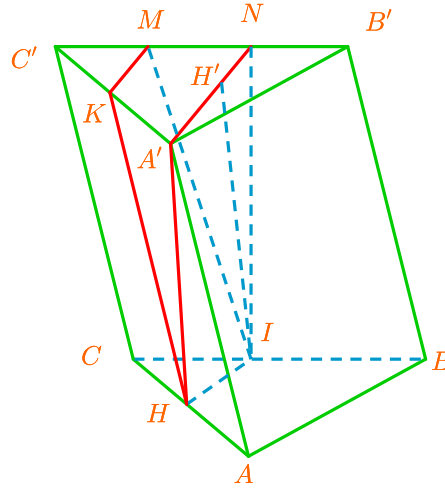
Mà $3x^2 + 2(m-2)x + (m-2)$ là phương trình bậc 2 có hệ số cao nhất là $3 > 0$ nên $y' \geq 0$ tương đương với $\Delta'_x = (m-5)(m-2) \leq 0$.

Điều này tương đương với $2 \leq m \leq 5$, suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5\}$ do m là số nguyên. $\square$

Câu 37. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**



Lấy I là hình chiếu của H lên cạnh BC . Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ACB thì ta tính được $CB = \sqrt{3}a$.

Lại có $\angle CIH = \angle CAB = 90^\circ$ nên $\triangle CIH \sim \triangle CAB$, suy ra $\frac{IH}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{AC}{2CB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ do đó $IH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta gọi K là trung điểm $A'C'$ và M là hình chiếu của K lên $B'C'$. Khi đó tứ giác $IMKH$ là hình bình hành nên $KM = IH$.

Lấy N đối xứng với C' qua M thì KM là đường trung bình trong tam giác $C'A'N$, kết hợp sự kiện ở trên thì $A'N$ song song và có độ dài bằng 2 lần đoạn IH .

Nhận thấy là giả thiết cho H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) nên mặt phẳng $(A'NIH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Do $A'N > HI$ nên $\angle HIN$ là góc tù, suy ra $\angle HIN = 180^\circ - ((ABC), (BCC'B')) = 120^\circ$ và $\angle A'NI = 60^\circ$.

Gọi H' là hình chiếu của I lên $A'N$ thì H' là trung điểm $A'N$ và $A'H = IH' = NH' \cdot \tan \angle H'NI = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$.

Từ đó ta có $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. $\square$

Claim 3.13 — Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có góc tạo bởi hai mặt phẳng là α . Lấy mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (P) và (Q) . Kí hiệu d_1 là giao tuyến của (P) , (R) và d_2 là giao tuyến của (Q) , (R) . Khi đó $\alpha \equiv (d_1, d_2) \pmod{\pi}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(1; -2; 5)$. Phương trình đã cho của mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc trục Oy là

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 22 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 26 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 22 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 26 = 0$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta kí hiệu mặt cầu thỏa mãn đề bài là (S) có tâm I , bán kính R . Do $I \in Oy$ nên I có tọa độ là $I(0; a; 0)$.

Vì I là tâm của mặt cầu nên $IA = IB$ hay là tương đương với $1^2 + (a - 2)^2 + 3^2 = 1^2 + (a + 2)^2 + 5^2$, giải ra ta được $a = -2$.

Suy ra $R = IA = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$ nên (S) có phương trình là

$$x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 26 \text{ hay tương đương } x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 22 = 0. \quad \square$$

Claim 3.14 — Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ trong không gian. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm là $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}, \forall x \neq 0$.

Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx$ bằng

A. $6 - e^2$.

B. $\frac{6 - e^2}{2}$.

C. $9 - e^2$.

D. $\frac{9 - e^2}{2}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta có

$$\int f'(x)dx = \int \frac{2x-1}{x^2} \cdot e^{2x}dx = \int \left(\frac{2}{x} \cdot e^{2x} - \frac{1}{x^2} \cdot e^{2x} \right) dx = \frac{e^{2x}}{x} + C$$

nên $f(x) = \frac{e^{2x}}{x} + C$.

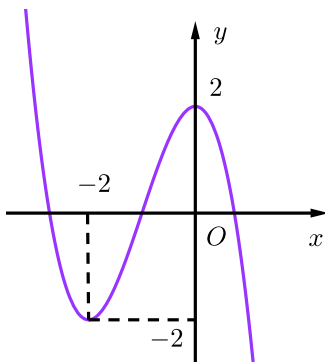
Thay $x = 1$, ta có $f(1) = e^2 + C$ suy ra $C = f(1) - e^2 = 0$.

Suy ra

$$\int_1^{\ln 3} xf(x)dx = \int_1^{\ln 3} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \Big|_1^{\ln 3} = \frac{1}{2} \left(e^{2\ln 3} - e^2 \right) = \frac{9 - e^2}{2}.$$

□

Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta có $g'(x) = (f(-x^2 + x))' = (-2x + 1)f'(-x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $f'(-x^2 + x) = 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ thì ta có $f'(-x^2 + x) = 0$ khi và chỉ khi $-x^2 + x = -2$ hoặc $-x^2 + x = 0$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	$1/2$	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên trên ta có thể suy ra ba điểm cực tiểu là $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$. $\square$

Nhận xét. Đề bài câu này cho hàm số bậc ba là hơi thừa vì chỉ cần nhìn hình vẽ đồ thị hàm số là đủ điều kiện để giải. Nếu có thêm giả thiết này chúng ta có thể mò hàm $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ và từ đó thay vào ra $g(x)$ rồi tính toán một cách trực tiếp.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

- A. 2020. B. 9. C. 2019. D. 10.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Hướng 1. Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$ ($t \geq 0$). Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$ hay $2x = 2^{t+1} - 2^y$.

Thay vào giả thiết bài toán ta có $2^y - t = 2^{t+1} - 2^y - y$, tương đương với

$$2^{y+1} + y = 2^{t+1} + t \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 2^{x+1} + x$ trên $\mathbb{R}$ thì $g'(x) = 2^{x+1} \ln 2 + 1 > 0$ nên $g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra từ (*) ta sẽ rút ra được $y = t$ hay $\log_2(x + 2^{y-1}) = y$ và ta có $x = 2^{y-1}$.

Kết hợp điều kiện $2 \leq x \leq 2021$ thì sẽ có $1 \leq y - 1 \leq 10$. Từ đó sẽ dễ tìm được 10 bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $\{(2^i; i + 1) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 10\}$.

Hướng 2. (Sử dụng máy tính và suy luận logic)

Trước hết, đề *vứt* cho ta phương trình trên và có điều kiện ràng buộc $2 \leq x \leq 2021$ nên ta có 2 cơ sở để coi y làm tham số và ta cần máy tính để giải x vì

- Do $2 \leq x \leq 2021$ nên nếu ta chọn x là tham số và giải y thì ta sẽ phải bấm máy 2020 trường hợp, rõ ràng không có cụ rùa nào nhanh hơn bạn đâu.
- Để ý về trái của phương trình có 2^y sẽ tăng vô cùng nhanh khi y tăng do đó để phương trình có nghiệm $x \leq 2021$ thì y sẽ bị chặn bởi một số a nào đó không quá lớn.

Nếu y là số nguyên âm, kết hợp $x \geq 2$ thì ta dễ thấy về trái nhỏ hơn về phải.

Vậy ta chỉ việc thử y là các số tự nhiên và ta nhập phương trình trên vào bấm **shift** + **solve** để tìm x . Thường máy tính sẽ tính được các số nguyên trước các số hữu tỷ, vô tỷ nhưng để chắc chắn phương trình của bạn có nghiệm nguyên hay không thì các bạn nhập vào máy tính như sau:

$$(2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) - (2x - y))^2 + (\text{Intg}(x) - x)^2 = 0$$

Trong đó $\text{Intg}(x)$ trong máy tính là hàm phần nguyên nên nếu nghiệm của phương trình trên nếu có sẽ là số nguyên. Và với hướng đi đầu cho ta thấy ta phải bấm máy khoảng 12,13 lần là chắc chắn giải quyết hoàn toàn bài toán này. $\square$

Nhận xét. Dạng toán $f(A) = f(B)$ với $f(x)$ là một hàm số đơn điệu trên một khoảng hay đoạn nào đó, để suy ra $A = B$ rất quen thuộc và có ứng dụng nhiều trong các bài toán hay từ thi đại học đến cả thi học sinh giỏi quốc gia.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

A. 16.

B. 17.

C. 0.

D. 15.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta xét $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x$ trên khoảng $(3; 5)$ thì

$$g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1.$$

Do $x \in (3; 5)$ nên $2-x \in (-3; -1)$, từ đó dựa vào bảng biến thiên thì ta có $f'(2-x) > 0$ và $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1 < 0$, suy ra $g'(x) < 0$ với mọi $x \in (3; 5)$.

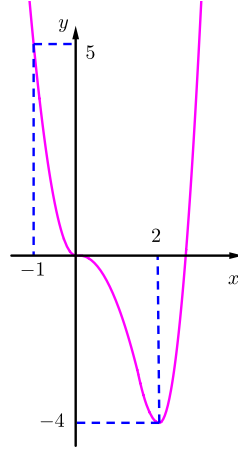
Vậy suy ra $g(5) < g(x) < g(3)$. Dựa vào giả thiết $f(-1) = 5$ và $f(-3) = 0$ thì ta tính được $g(5) = \sqrt{29} - 5$ và $g(3) = 12 + \sqrt{13}$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ sẽ vét hết các giá trị trong khoảng $(g(5); g(3))$ khi x chạy trong $(3; 5)$ (hệ quả của định lý giá trị trung gian).

Do đó m là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{29} - 5 < m < 12 + \sqrt{13}$ hay $1 \leq m \leq 15$ nên có 15 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1$, $f\left(\frac{-1}{e}\right) = 2$.

Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m > 0$. B. $m > 3 - \frac{1}{e^2}$. C. $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. D. $m \geq 0$.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Bất phương trình tương đương với $g(x) < m$ với $g(x) = f(x) - \ln(-x) - x^2$ trong đó $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Khi đó $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} - 2x$. Dựa vào đồ thị hàm số thì $f'(x) > 0$ và $\frac{1}{x}, 2x < 0$ với mọi $x \in \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$. Suy ra $g'(x) > 0$.

Từ đó ta có $g(x) < g\left(-\frac{1}{e}\right) = f\left(-\frac{1}{e}\right) - \ln\left(-\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e^2} = 3 - \frac{1}{e^2}$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ sẽ liên tục trên $\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$, suy ra khi $x \rightarrow \left(-\frac{1}{e}\right)^-$ thì $g(x) \rightarrow 3 - \frac{1}{e^2}$ nên $m \geq 3 - \frac{1}{e^2}$. $\square$

Nhận xét.

- Nếu đi thi tự luận sẽ có nhiều bạn trình bày bài toán này như sau

"Từ điều kiện bài toán sẽ suy ra $m \geq \max_{x \in (-1; -1/e))} g(x)$ "

Đây thực sự là một phát biểu rất liều lĩnh vì còn chưa biết chắc là hàm số $g(x)$ có max trong khoảng đó hay không. Cụ thể lời giải như trên thì đã có thể thấy là không có giá trị lớn nhất. Tuy nhiên do tính liên tục của hàm số nên $g(x)$ có thể tiến sát lại $g\left(-\frac{1}{e}\right)$ một khoảng $\epsilon > 0$ tùy ý nên m bắt buộc phải không nhỏ hơn $g\left(-\frac{1}{e}\right) = 3 - \frac{1}{e^2}$.

- Bình thường kiến thức giải tích ở THPT đối với các học sinh đều như bài hát "mơ hồ" của ca sĩ *Bùi Anh Tuấn* nên khi bộ giáo dục cho thi trắc nghiệm thì các kiến thức này lại càng bị mai một đi.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$.

B. 5.

C. 7.

D. 37.

Lời giải. Đáp án đúng: **C**

Do $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên tồn tại $F(x) = \int f(x)dx, \forall x > 0$.

Vì $x > 0$ nên giả thiết bài toán tương đương với

$$2xf(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = (2x + 1) \cdot \ln(x + 1).$$

Xét về trái $g(x) = 2xf(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ thì $\int g(x)dx = F(x^2 + 1) + F(\sqrt{x}) + C_1$.
và về phải $h(x) = (2x + 1) \ln(x + 1)$ thì

$$\begin{aligned} \int h(x)dx &= \int (2x + 1) \ln(x + 1)dx = (x^2 + x) \ln(x + 1) - \int (x^2 + x) \cdot \frac{1}{x + 1}dx \\ &= (x^2 + x) \ln(x + 1) - \int xdx \\ &= (x^2 + x) \ln(x + 1) - \frac{x^2}{2} + C_2. \end{aligned}$$

Suy ra $F(x^2 + 1) + F(\sqrt{x}) = (x^2 + x) \ln(x + 1) - \frac{x^2}{2} + C. (*)$

Thay $x = 4$ vào $(*)$ ta có $F(17) + F(2) = 20 \ln 5 - 8 + C$.

Thay $x = 1$ vào $(*)$ ta có $F(2) + F(1) = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} + C$.

Từ đó ta có $\int_1^{17} f(x)dx = F(17) - F(1) = 20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{15}{2}$.

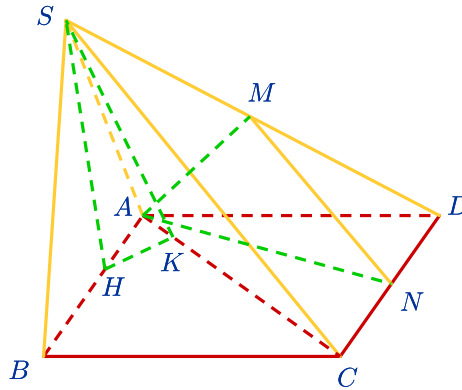
Suy ra $a = 20, b = 2, c = -\frac{15}{2}$ nên $a + b + 2c = 7$. □

Claim 3.15 — Hàm số $f(x)$ liên tục trong một khoảng hay đoạn nào đó thì đều tồn tại nguyên hàm của hàm số đó trên khoảng hay đoạn nêu trên.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB , góc giữa (SAC) và đáy là 45° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD . Khoảng cách giữa đường thẳng AM và SC là

A. a .B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.C. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$.D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**



Hướng 1. (Dùng ít não, tính toán nhiều) Ta gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì H là trung điểm AB . Kẻ $HK \perp AC$ ($K \in AC$). Khi đó SK cũng vuông góc với AC .

Ta thấy $SK \perp AC$ và SK nằm trên mặt phẳng (SAC) ; $HK \perp AC$ và HK nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên suy ra $((SAC); (ABCD)) = \angle SKH$ (do $\angle SKH$ là góc nhọn vì $\angle SHK = 90^\circ$).

Từ đó ta có được $\angle HKS = 45^\circ$ theo giả thiết đề bài, kết hợp $\triangle AKH \sim \triangle ABC$ nên tam giác AKH vuông cân tại K , suy ra $SH = HK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do vậy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta gọi N là trung điểm đoạn CD . Khi đó $\frac{V_{D.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{MD}{SD} \cdot \frac{S_{ADN}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ nên ta tính được $V_{D.AMN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

Nhận thấy M là trung điểm SD , N là trung điểm CD nên $MN \parallel SC$, suy ra $d(AM; SC) = d(SC; (AMN)) = d(C; (AMN)) = d(D; (AMN))$.

Ta lại có

$$d(D; (AMN)) = \frac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{32 \cdot S_{AMN}}$$

nên ta đi tính diện tích tam giác AMN .

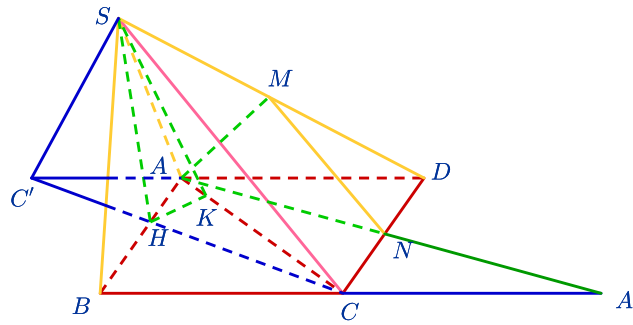
Ta sẽ tính được độ dài các đoạn $SB = SA = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$, $SC = SD = \sqrt{SK^2 + KC^2} = \frac{\sqrt{22}a}{4}$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác SAD thì ta có $AM = \frac{\sqrt{22}a}{8}$, tiếp tục cho tam giác ACD thì $AN = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ và $MN = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{22}a}{8}$.

Ta áp dụng công thức Heron cho tam giác AMN thì ta sẽ tính được $S_{AMN} = \frac{\sqrt{10}a^2}{32}$.

Từ đó suy ra $d(AM; SC) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng 2. (Kẻ thêm, tính toán ít). Ta kí hiệu điểm H, K như hướng 1.



Lấy A' đối xứng với A qua N và C' đối xứng với H qua C .

Khi đó dễ thấy A là trung điểm $C'D$ và C là trung điểm BA' và do H là trung điểm AB nên HC là đường trung bình tam giác BAA' .

Xét phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$ thì (SCC') biến thành (AMN) nên (AMN) song song với mặt phẳng (SCC') .

Chú ý $SH \perp (ABCD)$ nên mặt phẳng (SCC') vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên từ đó suy ra

$$\begin{aligned} d(AM; SC) &= d(SC; (AMN)) = d(H; (AMN)) = d(H; AA') = d(B; HC) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2}}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Từ hướng kẻ thêm cho ta thấy là đề bài bị thừa dữ kiện chỗ góc giữa hai mặt phẳng bằng 45° . Dù điểm S thay đổi bất kì và nằm trên đường thẳng qua H vuông góc với $(ABCD)$ thì $d(AM; SC)$ là không đổi và bằng $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. $\square$

Claim 3.16 — Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là d . Lấy điểm S bất kì trên (P) và không nằm trên d .

- Gọi H là hình chiếu của S lên (Q) , K là hình chiếu của H lên d thì SK sẽ vuông góc với d .
- $((P); (Q)) \equiv (KS; KH) \pmod{\pi}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **D**

Ta đặt $2 - \sqrt{x} = t$ hay $\sqrt{x} = 2 - t$ nên $\frac{-1}{2\sqrt{x}} dx = dt$.

Với $x = 1$ thì $t = 1$, và với $x = 4$ thì $t = 0$ nên suy ra

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx &= \int_1^0 -(1+3\sqrt{x}) f(t) dt = \int_0^1 (1+3\sqrt{x}) f(t) dt \\ &= \int_0^1 (7-3t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Do đó suy ra $\int_0^1 (7-3x) \cdot f(x) dx = 4$. (1)

Lại có $\int_0^1 x^2 f'(x) = x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx = 2 - \int_0^1 2xf(x) dx = 4$ nên $\int_0^1 2xf(x) dx = -2$ hay $\int_0^1 3xf(x) dx = -3$. (2)

Lấy (1) cộng (2) vế với vế ta có $\int_0^1 7f(x) dx = 1$ nên $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{7}$. $\square$

Câu 47. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O . Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. B. $2\sqrt{10}\pi a^2$. C. $\sqrt{10}\pi a^2$. D. $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Do thiết diện SAB là tam giác vuông cân tại S nên $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2$, ta rút ra được $SA = SB = 2\sqrt{2}a$ và $AB = 4a$.

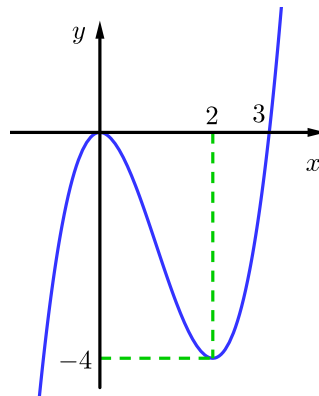
Gọi H là trung điểm AB thì $SH = HA = HB = 2a$.

Ta có $(SO; (SAB)) = 30^\circ$ nên suy ra $\angle HSO = 30^\circ$ và từ đó ta có $OH = \frac{1}{2}SH = a$.

Áp dụng định lý Pythagore thì ta tính được $OB = \sqrt{HB^2 + OH^2} = \sqrt{5}a$.

Vậy diện tích xung quanh hình nón bằng $S_{xq} = S \times l = (OB^2 \cdot \pi) \cdot SB = 2\sqrt{10}\pi a^2$. $\square$

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta có $g'(x) = e^x \cdot f'(e^x - 2)$ nên để $g(x)$ nghịch biến thì $f'(e^x - 2) \leq 0$. (*)

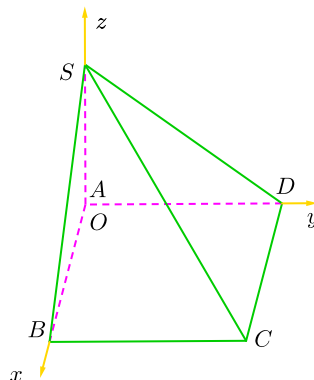
Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ thì ta có (*) tương đương với $e^x - 2 \leq 3$ nên $x \leq \ln 5$. Vậy chỉ có đáp án **A** thỏa mãn. $\square$

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **A**

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A trùng với gốc tọa độ O và B nằm trên Ox , D nằm trên Oy , S nằm trên Oz (như hình vẽ).



Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$, $AD = m$ ($m > 0$) thì ta có $A(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; m; 0)$, $D(0; m; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{SC} = (1; m; -1)$, $\overrightarrow{SD} = (0; m; -1)$.

Vì vậy $\overrightarrow{n_{(SBC)}} = [\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SC}] = (m; 0; m)$ và $\overrightarrow{n_{(SCD)}} = [\overrightarrow{SD}; \overrightarrow{SC}] = (0; -1; -m)$.

Do đó nếu $\alpha = ((SBC); (SCD))$ thì

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{n_{(SBC)}} \cdot \overrightarrow{n_{(SCD)}}|}{|\overrightarrow{n_{(SBC)}}| \cdot |\overrightarrow{n_{(SCD)}}|} = \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{2}m} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Giải phương trình trên với điều kiện $m > 0$ thì ta có $m = \sqrt{2}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ với $a = 1$ nên suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. $\square$

Câu 50. Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (H) . Xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác tù bằng

A. $\frac{39}{140}$.

B. $\frac{39}{58}$.

C. $\frac{45}{58}$.

D. $\frac{39}{280}$.

Lời giải. Đáp án đúng: **B**

Ta kí hiệu đa giác 30 đỉnh đều là $A_1A_2 \dots A_{30}$ và đường tròn ngoại tiếp đa giác này là (O) .

Xét đỉnh A_1 và ta chia đôi (O) bởi đường kính A_1A_{16} , khi đó tam giác tù có đỉnh là A_1 thì hai đỉnh còn lại phải nằm cùng một phía so với A_1A_{16} . Vậy có tổng cộng $2 \cdot C_{14}^2$ cách chọn tam giác tù có đỉnh là A_1 .

Xét tương tự với các đỉnh $A_2, A_3, \dots, A_{30}$ nhưng số tam giác bị đếm hai lần do khi xét đỉnh A_i và A_iA_{i+15} ($i = 1, 20$) là đường kính thì khi xét đến đỉnh A_{i+15} thì ta vẫn dùng A_iA_{i+15} làm đường kính, trong đó $i + 15$ ta hiểu là $i - 15$ nếu $16 \leq i \leq 30$.

Suy ra có tổng cộng số cách chọn tam giác tù là $30 \cdot C_{14}^2$ và nếu ta chọn ba đỉnh bất kì trong 30 đỉnh thì có C_{30}^3 cách chọn.

Suy ra xác suất để ba đỉnh lấy được tạo thành tam giác tù bằng $\frac{30 \cdot C_{14}^2}{C_{30}^3} = \frac{39}{58}$. $\square$

Chúc các bạn học sinh khối 12 của tỉnh Phú Thọ nói chung và trường THPT chuyên Hùng Vương nói riêng thi tốt ở kì thi chính thức sắp tới.

