UBND THÀNH PHỐ HẢI DƯƠNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – VÒNG 2
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm:01 trang)
Ngày thi: 21 tháng 6 năm 2023

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số khác 0 thoả mãn $a + b + c = 2023$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}$.
Tính giá trị biểu thức $A=\left(a^{2021}+b^{2021}\right)\left(b^{2023}+c^{2023}\right)\left(c^{2025}+a^{2025}\right)$

2) Cho biểu thức $B=\frac{x^5-4x^3-3x+9}{x^4+3x^2+11}$ biết x thỏa mãn $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$.
Chứng minh 3B là số nguyên.

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$

2) Cho đa thức $A=12x^2-3y^2+8xy+2x+y$ biết rằng a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn với $x=a; y=b$ thì giá trị của đa thức A bằng 0. Chứng minh rằng: $6a+b+1$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $C=n^4-8n^3+23n^2-26n+10$ là số chính phương.

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn: $x^3+y^3+1=5xy$.

Câu 4: (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi M là giao điểm của BF và CE

a) Chứng minh AB.CF = AC.AE

b) So sánh diện tích tứ giác AEMF và diện tích tam giác BMC.

2) Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh BC sao cho DC = 4.BD. Điểm M thay đổi trên đoạn thẳng AD, BM cắt AC tại E, CM cắt AB tại F. Xác định vị trí điểm M trên AD để diện tích tam giác DEF lớn nhất.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\frac{18b+18c}{2a+b+c}+\frac{9c}{a+b}$$

------------*Hết*------------

Họ tên thí sinh: .... *Số báo danh:* ....

Giám thị số 1 .... *Giám thị số 2*..

UBND THÀNH PHỐ HẢI DƯƠNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – VÒNG 2
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm: 05 trang)
Ngày thi: 21 tháng 6 năm 2023

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1	1	Theo đề bài ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2023}\Rightarrow\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{2023}$ $\Rightarrow\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$ (vì $a+b+c=2023$)	0,25
		$\Rightarrow(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc$ $\Rightarrow a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+abc+b^2c+bc^2=abc$ $\Rightarrow a^2b+ab^2+abc+a^2c+abc+ac^2+b^2c+bc^2=0$	0,25
		$\Rightarrow a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)=0$ $\Rightarrow(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$ $\Rightarrow(b+c)[a(a+c)+b(a+c)]=0$ $\Rightarrow(b+c)(a+c)(a+b)=0$	0,25
		$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^{2021}=(-b)^{2021}\\b^{2023}=(-c)^{2023}\\c^{2025}=(-a)^{2025}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^{2021}+b^{2021}=0\\b^{2023}+c^{2023}=0\\c^{2025}+a^{2025}=0\end{array}\right.$ Suy ra $A=0$	0,25
	2	*Ta có* $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$	0,25
		Ta có $x^5-4x^3-3x+9=(x^2-3x+1)(x^3+3x^2+4x+9)+20x=20x$	0,25
		$x^4+3x^2+11=(x^2-3x+1)(x^2+3x+11)+30x=30x$	0,25
		Do đó $3B=3.\frac{x^5-4x^3-3x+9}{x^4+3x^2+11}=3.\frac{20x}{30x}=2$ Vậy 3B là số nguyên	0,25
2	1	$\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$ Điều kiện: $x\neq-2$	0,125
		Với x = 0 không phải là nghiệm của phương trình $\frac{x}{x^2+4x+4}+\frac{5x}{x^2+4}=\frac{14}{15}$	0,125
		Với $x\neq0$ ta có: $\frac{1}{x+\frac{4}{x}+4}+\frac{5}{x+\frac{4}{x}}=\frac{14}{15}$ (*)	0,125
		Đặt $y=x+\frac{4}{x}+2$ phương trình (*) trở thành $\frac{1}{y+2}+\frac{5}{y-2}=\frac{14}{15}$	0,25

		$\Rightarrow 7y^2-45y-88=0 \Rightarrow (y-8)(7y+11)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=8 \\ y=\frac{-11}{7} \end{array}\right.$	
		Với y = 8 thì $x+\frac{4}{x}+2=8 \Rightarrow x^2-6x+4=0 \Rightarrow (x-3)^2=5$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=\sqrt{5} \\ x-3=-\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{5}\ (t/m) \\ x=3-\sqrt{5}\ (t/m) \end{array}\right.$	0,125
		Với y = $\frac{-11}{7}$ thì $x+\frac{4}{x}+2=\frac{-11}{7} \Rightarrow x^2+\frac{25}{7}x+4=0 \Rightarrow \left(x+\frac{25}{14}\right)^2=-\frac{159}{196}$ Vô lí vì $\left(x+\frac{25}{14}\right)^2 \geq 0\ \forall x$ (loại)	0,125
		Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{3\pm\sqrt{5}\right\}$	0,125
		Vì x = a, y = b thì giá trị của đa thức A bằng 0 nên ta có $12a^2-3b^2+8ab+2a+b=0$	0,125
		$\Rightarrow 12a^2+b^2+8ab+2a+b=4b^2$ $\Rightarrow 12a^2+6ab+b^2+2ab+2a+b=4b^2$	0,125
		$\Rightarrow 6a(2a+b)+b(2a+b)+(2a+b)=4b^2$ $\Rightarrow (6a+b+1)(2a+b)=4b^2$	0,25
	2	Đặt $(6a+b+1, 2a+b)=d\ \left(d\in N^*\right)$ $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a+b+1 \vdots d \\ 2a+b \vdots d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a+b+1 \vdots d \\ 3(2a+b) \vdots d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a+b+1 \vdots d \\ 6a+3b \vdots d \end{array}\right. \Rightarrow 2b-1 \vdots d$	0,25
		Vì $\left\{\begin{array}{l} 6a+b+1 \vdots d \\ 2a+b \vdots d \end{array}\right.$ suy ra $4b^2=(6a+b+1)(2a+b) \vdots d^2 \Rightarrow 2b \vdots d$	0,125
		Suy ra $1 \vdots d \Rightarrow d=1$ Do đó $(6a+b+1, 2a+b)=1$ Mà $(6a+b+1)(2a+b)=(2b)^2$ là số chính phương suy ra $6a+b+1$ là bình phương của một số nguyên.	0,125
		C = $n^4-8n^3+23n^2-26n+10$ $= (n^4-2n^2+1)-8n(n^2-2n+1)+9n^2-18n+9$ $= (n^2-1)^2-8n(n-1)^2+9(n-1)^2$	0,25
		$=(n-1)^2[(n+1)^2-8n+9]$ $=(n-1)^2[(n-3)^2+1]$	0,125
		TH1: $(n-1)^2=0 \Rightarrow n-1=0 \Rightarrow n=1$ (Thỏa mãn)	0,125
3	1	TH2: $(n-1)^2 \neq 0$ suy ra $(n-3)^2+1$ là số chính phương Đặt $(n-3)^2+1=k^2$ $(k\in N)$ $\Leftrightarrow k^2-(n-3)^2=1$ $\Leftrightarrow (k-n+3)(k+n-3)=1$	0,25
		TH1 $\left\{\begin{array}{l} k-n+3=1 \\ k+n-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k-n=-2 \\ k+n=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=1 \\ n=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)	0,125

TH2 $\begin{cases} k-n+3=-1 \\ k+n-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ n=3 \end{cases}$ (Không TM $k \in N$)

Vậy n =1; n = 3

0,125

2

$x^3+y^3+1=5xy.$

$\Rightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+1=5xy.$

0,125

Đặt $x+y=a,\ xy=b$ ta được $a^3-3ab+1=5b$

$\Rightarrow a^3+1=b(3a+5)$

Vì $3a+5\neq 0\ \forall a\in Z$ suy ra $b=\dfrac{a^3+1}{3a+5}$

0,125

Ta có $a^2-4b=(x-y)^2\geq 0\ \forall x,y$

Suy ra $a^2-\dfrac{4a^3+4}{3a+5}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}\geq 0$

0,125

Nếu $a\geq 5 \Rightarrow -a^3+5a^2-4=a^2(5-a)-4<0$ và $3a+5>0$

Suy ra $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}<0$ (loại)

0,125

Nếu $a\leq -2 \Rightarrow a^2(5-a)\geq 28 \Rightarrow -a^3+5a^2-4>0$ và $3a+5<0$

Suy ra $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}<0$ (loại)

0,125

Nếu -2 < a < 5 mà a là số nguyên suy ra $a\in\{-1;0;1;2;3;4\}$

a	-1	0	1	2	3	4
b	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{11}$	2	$\frac{65}{17}$
Kết quả	t/m	loại	loại	loại	t/m	loại

0,125

Với a = -1 suy ra b = 0 $x+y=-1,\ xy=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

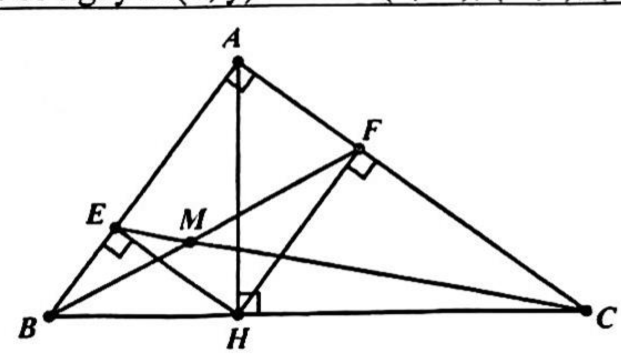
0,125

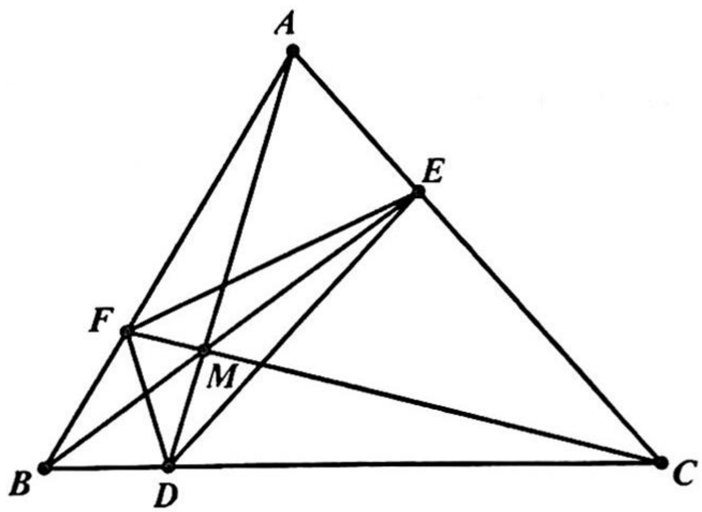
Với a = 3 suy ra b = 2 $x+y=3,\ xy=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên (x; y) cần tìm (0; -1); (-1;0); (1;2); (2;1)

0,125

4



	1a	Vì HF//AB (cùng vuông góc với AC) Suy ra $\frac{CF}{AC}=\frac{CH}{BC}$ (1)	0,25
		Vì HE//AC (cùng vuông góc với AB) Suy ra $\frac{AE}{AB}=\frac{CH}{BC}$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{AC}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow AB.CF=AC.AE$	0,25
	1b	Ta có $\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BA}$ Mà HE//AC $\Rightarrow\frac{BE}{BA}=\frac{BH}{BC}$ suy ra $\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}}=\frac{BH}{BC}$	0,25
		Tương tự ta có $\frac{S_{BFC}}{S_{ABC}}=\frac{CH}{BC}$ Do đó $\frac{S_{BFC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}}=\frac{CH+BH}{BC}=1$	0,25
		$S_{ABC}=S_{BFC}+S_{BEC}\Rightarrow S_{ABF}=S_{BEC}\Rightarrow S_{AEMF}=S_{BMC}$	0,25
	2		
		Đặt $\frac{AF}{BF}=x,\frac{BD}{DC}=y,\frac{CE}{EA}=z\ \ (x,y,z>0)$ Ta có $\frac{AF}{BF}=\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}},\frac{BD}{DC}=\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}},\frac{CE}{EA}=\frac{S_{BMC}}{S_{AMB}}$ $\Rightarrow xyz=\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}.\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}.\frac{S_{BMC}}{S_{AMB}}=1$	0,25
		Từ $\frac{AF}{BF}=x,\frac{CE}{EA}=z\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{x}{x+1},\frac{AE}{AC}=\frac{1}{z+1}$ Suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AEF}}{S_{ABE}}.\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{AF}{AB}.\frac{AE}{AC}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}$ Tương tự $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{y}{(y+1)(x+1)};\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\frac{z}{(z+1)(y+1)}$	0,25
		Từ đó ta có $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}-\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}-\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=1-\frac{x}{(x+1)(z+1)}-\frac{y}{(y+1)(x+1)}-\frac{z}{(z+1)(y+1)}$	

		$=\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)-x(y+1)-y(z+1)-z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$ $=\dfrac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\dfrac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$	0,25
		Vì CD = 4BD suy ra $y=\dfrac{1}{4}$ suy ra $xz=4$	0,125
		Suy ra $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{2}{\dfrac{5}{4}(x+1)(z+1)}=\dfrac{8}{5(xz+x+z+1)}=\dfrac{8}{5(5+x+z)}$	0,125
		Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $x+z\geq 2\sqrt{xz}=4$ $\Rightarrow 5(5+x+z)\geq 45\Rightarrow \dfrac{8}{5(5+x+z)}\leq\dfrac{8}{45}$	0,125
		Suy ra $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}}\leq\dfrac{8}{45}\Rightarrow S_{DEF}\leq\dfrac{8}{45}S_{ABC}$ (không đổi)	0,125
		Dấu "=" xảy ra khi $x=z=2$ $\Leftrightarrow \dfrac{S_{AMC}}{S_{BMC}}=2\Leftrightarrow \dfrac{S_{AMC}}{\dfrac{5}{4}S_{DMC}}=2\Leftrightarrow \dfrac{S_{AMC}}{S_{DMC}}=\dfrac{5}{2}$ (Vì $S_{BMC}=\dfrac{5}{4}S_{DMC}$) $\Leftrightarrow \dfrac{AM}{MD}=\dfrac{5}{2}$	0,125
		Vậy để diện tích của tam giác DEF lớn nhất thì M thuộc đoạn AD thỏa mãn $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{5}{2}$	0,125
5		$M=\dfrac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+\dfrac{18b+18c}{2a+b+c}+\dfrac{9c}{a+b}$ $\Rightarrow M+43=\left(\dfrac{33a+17b+c}{a+2b+3c}+16\right)+\left(\dfrac{18b+18c}{2a+b+c}+18\right)+\left(\dfrac{9c}{a+b}+9\right)$	0,25
		$\Rightarrow M+43=\dfrac{49(a+b+c)}{a+2b+3c}+\dfrac{36(a+b+c)}{2a+b+c}+\dfrac{9(a+b+c)}{a+b}$ $\Rightarrow M+43=(a+b+c)\left(\dfrac{49}{a+2b+3c}+\dfrac{36}{2a+b+c}+\dfrac{9}{a+b}\right)$	0,125
		Chứng minh $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\ \forall x,y,z>0$	0,125
		Áp dụng ta có $\dfrac{7^2}{a+2b+3c}+\dfrac{6^2}{2a+b+c}+\dfrac{3^2}{a+b}\geq\dfrac{(7+6+3)^2}{4a+4b+4c}=\dfrac{64}{a+b+c}$ $\Rightarrow M+43\geq 64\Rightarrow M\geq 21$	0,25
		Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{7}{a+2b+3c}=\dfrac{6}{2a+b+c}=\dfrac{3}{a+b}$ $\Rightarrow \dfrac{7}{a+2b+3c}=\dfrac{6}{2a+b+c}=\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{6-3}{a+c}\Rightarrow \begin{cases} b=c \\ a=2b \end{cases}$	0,125
		Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 21 khi a = 2b = 2c	0,125

- Nếu học sinh giải bằng cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Tổng điểm toàn bài để 3 chữ số phần thập phân.

----------- Hết ----------