

Lưu ý:

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan **chỉ có một** lựa chọn đúng.
- Thí sinh làm bài thi (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi; **không** làm bài trên đề thi.

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1: Giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}$ bằng

- A. $\sqrt{2022} - 1$. B. $1 - \sqrt{2023}$. C. $1 - \sqrt{2022}$. D. $\sqrt{2023} - 1$.

Câu 2: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} + \sqrt{a} - 2 < 9$?

- A. 7. B. 6. C. 36. D. 35.

Câu 3: Cho $a - b = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Giá trị của biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2023$ bằng

- A. 2023. B. 2059. C. 2035. D. 2027.

Câu 4: Phương trình $(m^2 - 4)x + m - 2 = 0$ vô nghiệm khi

- A. $m = -2$. B. $m \neq 0$. C. $m = 2$. D. $m \neq 2; m \neq -2$.

Câu 5: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x - 3$, $(d_2): y = (m - 2)x + 13 - m^2$. Giá trị của tham số m để $d_1 \perp d_2$ là

- A. $m = 0$. B. $m = 4$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -1)$; $B(-2; 5)$. Khi đó tích ab bằng

- A. -1. B. -6. C. -2. D. 5.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = ax + b$ đồng biến và đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân có chu vi bằng $6 + 3\sqrt{2}$. Đặt $S = a + b^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $-8 \leq S \leq 9$. B. $S > 9$. C. $-9 \leq S \leq -8$. D. $S < -9$.

Câu 8: Cho tam giác cân ABC tại A với $AB = AC = 8, BC = 10$, đường cao BK . Tỷ số $\frac{AK}{AC}$ bằng

- A. $\frac{7}{32}$. B. $\frac{12}{33}$. C. $\frac{21}{64}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC với trọng tâm G và I là trung điểm của AG . Gọi K là điểm nằm trên cạnh AC sao cho ba điểm B, I, K thẳng hàng. Biết tam giác ABC có diện tích bằng 30. Diện tích của tam giác AIK bằng

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 10: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a, \widehat{ABC} = 60^\circ$. Điểm G là trọng tâm tam giác ADC . Độ dài đoạn BG bằng

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết diện tích các tam giác ABH và ACH lần lượt là 54cm^2 và 96cm^2 . Độ dài cạnh BC bằng

- A. 24cm. B. 25cm. C. 20cm. D. 36cm.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh

AB, CD . Qua M hạ $MP \perp AC$, MP cắt BC tại Q sao cho B nằm giữa C, Q . Độ dài cạnh $PQ = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a - 2b$ bằng

- A. 43. B. 83. C. 103. D. 63.

Câu 13: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Tổng diện tích các mặt bên bằng $6a^2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

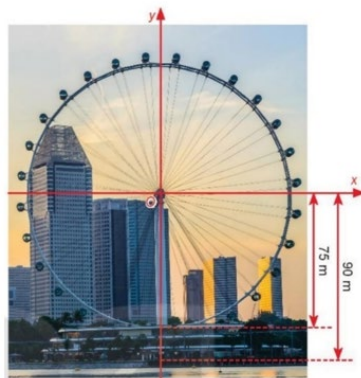
Câu 14: Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại P . Gọi D, E tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các đường thẳng AB, AC . Diện tích tam giác ADE bằng

- A. $\frac{27\sqrt{3}R^2}{8}$. B. $\frac{27\sqrt{3}R^2}{16}$. C. $\frac{9\sqrt{3}R^2}{16}$. D. $\frac{9\sqrt{3}R^2}{8}$.

Câu 15: Cho đường tròn $(O; 5)$ và một điểm P thay đổi nhưng luôn nằm ở bên trong đường tròn đó. Qua P ta kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau. Tổng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ có giá trị bằng

- A. 200. B. 75. C. 25. D. 100.

Câu 16: Một chiếc đu quay có bán kính 75m , tâm của vòng quay ở độ cao 90m , thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



- A. 127,5 m. B. 165 m. C. 127 m. D. 165,5 m.

B. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

b) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4 - 8n^3 + 23n^2 - 26n + 10$ là số chính phương.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{3}$.

b) Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 6b + 2023c$.

c) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số nguyên, $n \geq 2$. Biết $P(1).P(2) = 2023$. Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , gọi H là trung điểm của cạnh BC , M là điểm bất kỳ thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN .

a) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi P là giao điểm của OI và AB . Chứng minh rằng tam giác MNP đều.

c) Xác định vị trí điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	D	11	B
2	C	12	A
3	B	13	C
4	A	14	B
5	D	15	D
6	C	16	A
7	B		
8	A		
9	C		
10	D		

II. PHẦN TỰ LUẬN

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic;
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC;
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

Hướng dẫn chấm tự luận

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4 - 8n^3 + 23n^2 - 26n + 10$ là số chính phương.
b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

Ý	Đáp án	Điểm
A) (1,0 điểm)	Ta có $n^4 - 8n^3 + 23n^2 - 26n + 10 = (n^2 - 1)^2 - 8n(n-1)^2 + 9(n-1)^2 = (n-1)^2 \left[(n-3)^2 + 1 \right]$ Do đó $n^4 - 8n^3 + 23n^2 - 26n + 10$ là số chính phương khi $(n-1)^2 = 0$ hoặc $(n-3)^2 + 1$ là số chính phương.	0,25
	Trường hợp 1: $(n-1)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 1$.	0,25

	Trường hợp 2: $(n-3)^2 + 1$ là số chính phương. Khi đó $(n-3)^2 + 1 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (k-n+3)(k+n-3) = 1$ Vì $n, k \in \mathbb{Z}$ nên $(k-n+3)(k+n-3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k-n+3=1 \\ k+n-3=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k-n+3=-1 \\ k+n-3=-1 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} k-n+3=1 \\ k+n-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=3 \end{cases}$ +) $\begin{cases} k-n+3=-1 \\ k+n-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ n=3 \end{cases}$ Vậy $n=1; n=3$.	0,25
b) (2,0 điểm)	Ta có $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16 \Leftrightarrow 2^x \cdot x^2 = (3y+1)^2 + 15$	0,25
	Nhận thấy $(3y+1)^2 + 15 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^x \cdot x^2 \equiv 1 \pmod{3}$	0,25
	Mà x^2 là số chính phương nên $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ hoặc $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$	0,25
	Do đó $2^x \cdot x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ khi $2^x \equiv 1 \pmod{3}$, suy ra x chẵn $\Rightarrow x = 2k$.	0,25
	Ta được $2^{2k} \cdot (2k)^2 = (3y+1)^2 + 15 \Leftrightarrow (2^k \cdot k - 3y - 1)(2^k \cdot k + 3y + 1) = 15$ Do $y, k \in \mathbb{N}$ nên $2^k \cdot k + 3y + 1 > 2^k \cdot k - 3y - 1$ Từ $(2^k \cdot k - 3y - 1)(2^k \cdot k + 3y + 1) = 15$ ta được	0,25
	Trường hợp 1: $\begin{cases} 2^k \cdot k - 3y - 1 = 1 \\ 2^k \cdot k + 3y + 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 8 \\ 3y + 1 = 7 \end{cases} \text{ (Không có } k \in \mathbb{N} \text{ thỏa mãn)}$	0,25
	Trường hợp 2: $\begin{cases} 2^k \cdot k - 3y - 1 = 3 \\ 2^k \cdot k + 3y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 4 \\ 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ Vậy $x = 2; y = 0$.	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$.

b) Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 6b + 2023c$.

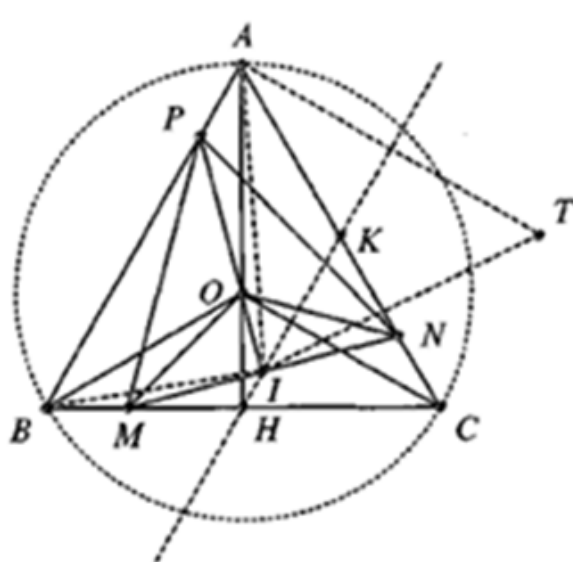
c) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số nguyên, $n \geq 2$. Biết $P(1) \cdot P(2) = 2023$. Chứng minh rằng phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Ý	Đáp án	Điểm
a)	Điều kiện: $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.	0,25

(1,5 điểm)	$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4-x} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x - 11}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} + 3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3} + \sqrt{4-x}} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2 + 5x + 11)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} + 3\sqrt{3}} + \frac{x-1}{\sqrt{3} + \sqrt{4-x}} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2x^2 + 5x + 11}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} + 3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4-x}} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{2x^2 + 5x + 11}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} + 3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4-x}} = 0 \end{cases} \quad (1)$	0,25
	$\forall x \in [-2; 4], \text{ Ta có: } 2x^2 + 5x + 11 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{63}{8} > 0$ $\Rightarrow \frac{2x^2 + 5x + 11}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} + 3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in [-2; 4]$ $\Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$ Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.	0,25
b) (1,5 điểm)	Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 3(a+b).c.(a+b+c) - 3ab(a+b+c) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ $\Leftrightarrow a = b = c$ Mà $a + b + c = 1$ nên $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,5
	Vậy $P = 5a + 6b + 2023c = \frac{5+6+2023}{3} = \frac{2034}{3} = 678$.	0,5
c) (1,0 điểm)	Giả sử $P(x) = 0$ có nghiệm nguyên $a \in \mathbb{Z}$ Khi đó $P(x) = (x-a)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.	0,25
	Ta có $P(1).P(2) = (1-a).(2-a).Q(1).Q(2)$	0,25
	Nhận thấy $(1-a); (2-a)$ là 2 số nguyên liên tiếp nên $(1-a).(2-a) : 2$.	0,25
	Mà $P(1).P(2) = (1-a).(2-a).Q(1).Q(2) = 2023$ không chia hết cho 2. Vậy giả sử sai hay $P(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.	0,25

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , gọi H là trung điểm của cạnh BC , M là điểm bất kỳ thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.
b) Gọi P là giao điểm của OI và AB . Chứng minh rằng tam giác MNP đều.
c) Xác định vị trí điểm M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Ý	Đáp án	Điểm
a) (1,5 điểm)		
	a) Do H là trung điểm của BC nên $OH \perp BC$.	0,25
	Ta có $\triangle OBM = \triangle OCN$ ($c - g - c$) nên $\triangle OMN$ cân tại M . Mà I là trung điểm của MN nên $OI \perp MN$. Vậy bốn điểm O, I, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính OM .	0,5 0,25
b) (1,5 điểm)	Do $\triangle OBM = \triangle OCN$ ($c - g - c$) nên $\widehat{BOM} = \widehat{CON}$ Suy ra $\widehat{MON} = \widehat{MOC} + \widehat{CON} = \widehat{MOC} + \widehat{BOM} = \widehat{BOC} = 120^\circ$. Khi đó $\widehat{PON} = \frac{360^\circ - \widehat{MON}}{2} = 120^\circ$ Ta được $\widehat{PAN} + \widehat{PON} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $APON$ nội tiếp. Do đó $\widehat{OPN} = \widehat{OAN} = 30^\circ$. Chứng minh tương tự $\widehat{OPM} = 30^\circ$ do đó $\widehat{MPN} = 60^\circ$. Mặt khác P thuộc trung trực của MN nên $PM = PN$.	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25
c) (1,0 điểm)	Theo phần a ta có $\widehat{IHC} = \widehat{IOM} = 60^\circ = \widehat{ABC}$ nên $IH \parallel AB$. Suy ra đường thẳng IH cố định. Gọi K là trung điểm của AC , ta có 3 điểm H, I, K thẳng hàng (do cùng nằm trên đường thẳng song song với AC). Lấy điểm T đối xứng với A qua $HI \Rightarrow T$ là 1 điểm cố định. Ta có $AI + BI + AB = IT + IB + AB \geq BT + AB$ Do đó chu vi tam giác AIB nhỏ nhất bằng $BT + AB$, đạt được khi 3 điểm B, I, T thẳng hàng. Khi đó I là trung điểm của BT cố định (theo tính chất đường trung bình của tam giác BAT).	0,25 0,25 0,25

	Suy ra tứ giác $BMTN$ là hình bình hành và $TN \parallel BC$.	
	Lại có $BH = KT, BK = HT$ nên tứ giác $BHKT$ là hình bình hành và $KT \parallel BC$. Vậy $N \equiv K \Rightarrow M \equiv H$.	0,25

Câu 4 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Ý	Đáp án	Điểm
1,0 điểm	Ta có $T+5 = \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b}\right) + \left(\frac{2a}{3b} + \frac{2a}{2a}\right) + \left(\frac{3c}{2a} + \frac{3c}{3b}\right) + \left[\frac{12(b-c)}{2a+3c} + 4\right]$ $= \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b}\right) + (2a+3c)\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}\right) + \frac{4(2a+3b)}{2a+3c}.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{3a}{2b} + \frac{2b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{2b} \cdot \frac{2b}{3a}} = 2.$	0,25
	Áp dụng BĐT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$ ta có $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq \frac{4}{2a+3b}.$	0,25
	Suy ra $T+5 \geq 2+4\left(\frac{2a+3c}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{2a+3c}\right) \geq 2+4.2 = 10.$ Vậy $T \geq 5.$ Dấu "=" xảy ra khi $2a = 3b = 3c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 5.	0,25