

LIÊN TRƯỜNG THCS HUYỆN DIỄN CHÂU

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG LỚP 8 VÒNG 2

NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn Toán – Thời gian làm bài 120 phút

Bài 1. (4.0 điểm)

- Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.
- Cho a là số nguyên. Chứng minh rằng $a^3 - 2023a$ chia hết cho 6.

Bài 2. (4.0 điểm) Cho biểu thức :

$$A = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$$

- Tìm điều kiện xác định của A , rút gọn A
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .

Bài 3. (5.0 điểm)

- Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$
- Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{20} + x^{10} + x^5 + 1$ cho đa thức $x^2 - 1$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(xy-8) + 5x^2 + 3y^2 - 2x - 8y + 2036$$

Bài 4. (6.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

- Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.
- Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh H là trực tâm $\triangle AEF$
- Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của BK và AD là I . Chứng minh : $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Bài 5. (1.0 điểm)

Cho đa giác đều gồm 2023 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

-----Hết-----

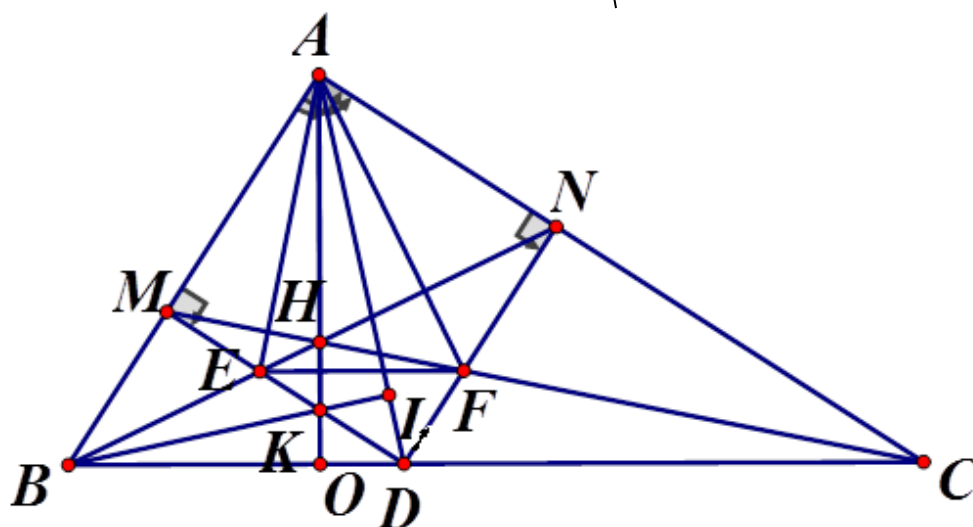
Giám thị không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh.....SBD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH TRƯỜNG MÔN TOÁN LỚP 8
VÒNG II NĂM HỌC 2022-2023
(Hướng dẫn chấm này có 04 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 4.0 đ	a 2.0	a) Tìm số tự nhiên n để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương.	<u>2.0</u>
		Để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương $\Leftrightarrow n + 18 = p^2$ và $n - 41 = q^2$ ($p, q \in \mathbb{N}$)	0.25
		$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n + 18) - (n - 41) = 59 \Leftrightarrow (p - q)(p + q) = 59$	0.5
		Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 30 \\ q = 29 \end{cases}$	0.5
		Từ $n + 18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$	0.5
		Thay vào $n - 41$, ta được $882 - 41 = 841 = 29^2 = q^2$ Vậy với $n = 882$ thì $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương	0.25
	b 2.0	b) Cho a là số nguyên. Chứng minh rằng $a^3 - 2023a$ chia hết cho 6.	<u>2.0</u>
		Ta có $a^3 - 2023a = (a^3 - a) - 2022a$	0.5
		$= (a - 1)a(a + 1) - 2022a$	0.5
		Trong đó $(a - 1)a(a + 1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, mà $(2;3) = 1$ nên $(a - 1)a(a + 1) : 6$;	0.5
		$2022a : 6$. Vậy $a^3 - 2023a : 6$	0.5
2 4,0 đ	a 2,5	2. Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$	<u>2.5</u>
		a. Tìm điều kiện xác định của A , rút gọn A	
		a. ĐK: $x \neq -1; x \neq -2$	0.5
		$A = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x + 2}$	1.0
		$= \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$	1.0
		b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .	<u>1.5</u>

		$A = \frac{1}{x^2 - x + 1};$ Vì $1 > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$	0.5
		A đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2 - x + 1$ đạt GTNN $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(tm)$	0.5
		Lúc đó $A = \frac{4}{3}$. Vậy GTLN của A là $A = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{2}$	0.5
3 4,5 đ	a 2.0	a) Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$	<u>2.0</u>
		Đặt $x + 4 = t$ Phương trình đã cho trở thành $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$	0,5
		$\Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 16$	0,5
		$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 7)(t^2 - 1) = 0$	0,5
		Vì $t^2 + 7 > 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow x = -3; x = -5$	0,5
	b 1,5	b) Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{20} + x^{10} + x^5 + 1$ cho đa thức $x^2 - 1$	<u>1.5</u>
		Vì đa thức chia bậc 2 nên đa thức dư có dạng $ax+b$, gọi đa thức thương là $Q(x)$, khi đó ta có: $x^{20} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ (1)	0.5
		Thay $x=1$ vào (1) ta được: $a+b=4$ Thay $x=-1$ vào (1) ta được $-a+b=2$	0.5
		Từ đó suy ra $a=1; b=3$ Vậy đa thức dư là: $x+3$	0.5
	b 1,5	c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = xy(xy-8) + 5x^2 + 3y^2 - 2x - 8y + 2036$	<u>1.5</u>
		$B = x^2y^2 - 8xy + 5x^2 + 3y^2 - 2x - 8y + 2036$ $= (x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) + 2023$	0,5
		$= (xy-2)^2 + (2x-y)^2 + (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 2023$	0.5
		Vì $(xy-2)^2 \geq 0; (2x-y)^2 \geq 0; (x-1)^2 \geq 0; 2(y-2)^2 \geq 0$ nên $B \geq 2023$ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x=1; y=2$. Vậy $B_{\min} = 2023 \Leftrightarrow x=1; y=2$	0,5
4 7,0 đ		Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN . a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$. b) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh H là trực tâm $\triangle AEF$ c) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I. Chứng minh : $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$	<u>6,0</u>



a 3.0	*Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông +) Chứng minh $\widehat{AMD} = 90^\circ$; $\widehat{AND} = 90^\circ$; $\widehat{MAN} = 90^\circ$ Suy ra tứ giác AMDN là hình chữ nhật	1.0
	+) Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác AMDN là hình vuông.	0.5
	*Chứng minh EF // BC +) Chứng minh : $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)	0.25
	Chứng minh: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)	0.25
	Vì $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)	0.25
	Chứng minh $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4)	0.25
	Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF // BC$	0.5
b 1.5	Chứng minh H là trực tâm $\triangle AEF$ + Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$	
	Vì $AN = DN$.suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5) Chứng minh $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6) Chứng minh $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7) Chứng minh $AM = AN$.Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8) Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA(c.g.c)$	

			0.75
		+ Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $\widehat{NBA} = \widehat{FAN}$ Mà $\widehat{BAF} + \widehat{FAN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NBA} + \widehat{BAF} = 90^\circ$ Suy ra $EH \perp AF$,	0.5
		Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$	0.25
c 1.5		Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó: $\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ $= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$	0.5
		Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ Tương tự: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ Suy ra $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$	0.5
		Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABD$ là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết. Vậy $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$	0.5
2. 1,0 đ		Cho đa giác đều gồm 2023 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.	1.0
		Ta có đa giác 2023 cạnh nên có 2023 đỉnh. Do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng một màu – màu đỏ (Theo nguyên lý Dirichle) Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ. Giả sử đỉnh đó là A. Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.	0.5
		Nếu A tô màu xanh, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q. Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác ABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh. Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ	0,5

Lưu ý:

- Nếu học sinh không vẽ hình bài 4 hoặc vẽ sai thì không chấm bài 4.
- Nếu học sinh làm cách khác đúng thì vẫn cho điểm tương ứng với từng phần.