

**Câu 1.** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

- A. 2.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 3.

**Câu 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ , số vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác là

- A. 10.                      B. 6.                      C. 4.                      D. 12.

**Câu 3.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_4 = 3$  và  $u_7 = 9$ . Tìm số hạng thứ 2022 của cấp số cộng  $(u_n)$ .

- A.  $u_{2022} = 4039$ .                      B.  $u_{2022} = 4035$ .                      C.  $u_{2022} = 4037$ .                      D.  $u_{2022} = 4041$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-1$ | $+\infty$ |     |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(-\infty; -2)$ .                      B.  $(1; +\infty)$ .                      C.  $(-2; 1)$ .                      D.  $(-1; 2)$ .

**Câu 5.** Cho số thực  $a > 0; a \neq 1$ ,  $\log_{\sqrt{a}}(a^2 \sqrt[3]{a})$  bằng

- A.  $\frac{7}{3}$ .                      B.  $\frac{5}{3}$ .                      C.  $\frac{10}{3}$ .                      D.  $\frac{14}{3}$ .

**Câu 6.** Số cạnh của một hình bát diện đều là

- A. 12.                      B. 10.                      C. 8.                      D. 6.

**Câu 7.** Khối cầu  $(S)$  có diện tích bằng  $36\pi a^2 (cm^2)$ ,  $(a > 0)$  thì có thể tích là:

- A.  $288\pi a^3 (cm^3)$ .                      B.  $9\pi a^3 (cm^3)$ .  
C.  $108\pi a^3 (cm^3)$ .                      D.  $36\pi a^3 (cm^3)$ .

**Câu 8.** Cho khối nón có chiều cao  $h = 6a$  và bán kính đáy  $r$  bằng một nửa chiều cao  $h$ . Tính thể tích của khối nón đã cho.

- A.  $12\pi a^3$ .                      B.  $54\pi a^3$ .                      C.  $9\pi a^3$ .                      D.  $18\pi a^3$ .

**Câu 9.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x - \frac{2}{x^2}$  là

- A.  $e^x - \frac{2}{x} + C$ .                      B.  $e^x - 2\ln x^2 + C$ .                      C.  $e^x + \frac{2}{x} + C$ .                      D.  $e^x + \frac{1}{x} + C$ .

**Câu 10.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \cos^2 x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và  $x = \pi$  là

- A.  $\frac{\pi}{8}$ .                      B.  $\frac{\pi}{6}$ .                      C.  $\frac{\pi}{4}$ .                      D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 11.** Số hạng thứ 9 khai triển  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$  ( $x \neq 0$ ) bằng

A. 495 .

B. -792 .

C. 220 .

D. -220 .

**Câu 12.** Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-5}}$ .

A.  $\frac{3}{5}$ .B.  $-\frac{3}{5}$ .

C. 5.

D. -5.

**Câu 13.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ,  $M, N$  là các điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$ ,  $\overrightarrow{NA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A.  $MN \parallel (AC'B)$ .B.  $MN \parallel (BC'D)$ .C.  $MN \parallel (A'C'D)$ .D.  $MN \parallel (BC'B)$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-5x+4)(x+2)^{2023}$ . Hỏi hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 15.** Giá trị lớn nhất hàm số  $f(x) = \cos^2 4x - \sin 2x \cos 2x + 4$  trên  $\mathbb{R}$  là

A.  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{81}{16}$ .B.  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{2}$ .C.  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$ .D.  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$ .

**Câu 16.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$  là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

**Câu 17.** Nghiệm của phương trình  $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$  nằm trong khoảng nào sau đây?

A.  $(-1; 0)$ .B.  $(0; 1)$ .C.  $(2; 3)$ D.  $(4; 5)$ 

**Câu 18.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $2^{x^2-2x-1} \leq 3$  là

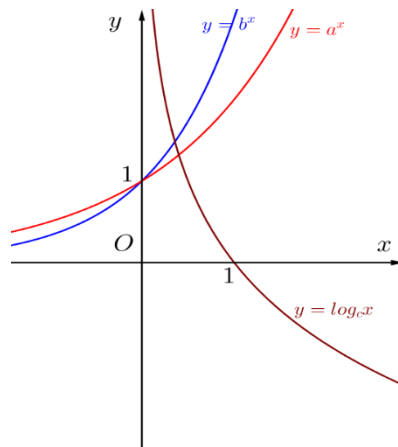
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

**Câu 19.** Đồ thị của ba hàm số  $y = a^x$ ,  $y = b^x$ ,  $y = \log_c x$  (với  $a, b, c$  là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng mặt phẳng tọa độ (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $c > b > a$ .B.  $b > a > c$ .C.  $a > b > c$ .D.  $c > a > b$ .

**Câu 20.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ . Biết

$AC = 2a, BC = a, AA' = 2a\sqrt{3}$ , thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng

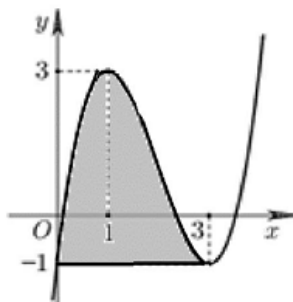
A.  $6a^3$ .

B.  $2a^3$ .

C.  $3a^3$ .

D.  $3a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 21.** Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Diện tích  $S$  của miền được tô đậm như hình được tính theo công thức nào?



A.  $S = \int_0^3 (f(x) + 1) dx$ .

B.  $S = \int_0^3 (f(x) - 1) dx$ .

C.  $S = \int_{-1}^3 (f(x) + 1) dx$ .

D.  $S = \int_0^3 |f(x) - 1| dx$ .

**Câu 22.** Tập nghiệm của bất phương trình  $(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3}$

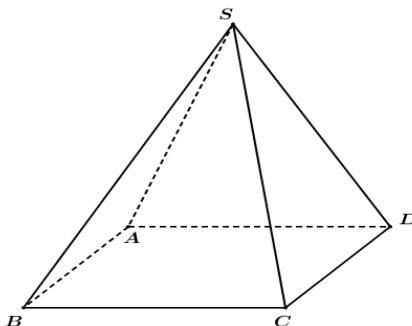
A.  $(-\infty; -5)$ .

B.  $(-\infty; 0)$ .

C.  $(-5; +\infty)$ .

D.  $(0; +\infty)$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh bên bằng  $a\sqrt{3}$ , mặt bên tạo với đáy một góc  $45^\circ$



Thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng

A.  $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$

B.  $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{2}$ .

C.  $\frac{2a^3}{3}$ .

D.  $\frac{4a^3}{3}$ .

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^6 f(x) dx = 9$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^2 f(3x) dx$  bằng

A. 3.

B. 18.

C. 1.

D. 27.

**Câu 25.** Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3, 4, 5.

A.  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ .

B.  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ .

C.  $50\pi$ .

D.  $50\pi\sqrt{2}$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $\sqrt{2}a$ . Tam giác  $SAD$  cân tại  $S$  và mặt bên  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{4}{3}a^3$ . Tính khoảng cách  $h$  từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$

A.  $h = \frac{2}{3}a$

B.  $h = \frac{4}{3}a$

C.  $h = \frac{8}{3}a$

D.  $h = \frac{3}{4}a$

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \sqrt{\frac{8\cos 2x - m}{\sin^2 x - 2\sin x + 3}}$  (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-60; 60)$  để tập xác định của hàm số (1) là  $\mathbb{R}$ ?

A. 68.

B. 53.

C. 52.

D. 69.

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ , đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ , có  $I$  là giao của hai đường chéo  $AC, BD$ . Góc giữa  $SI$  với  $(ABCD)$  là

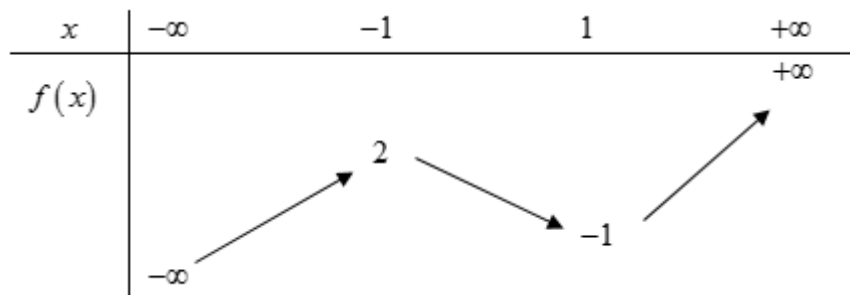
A.  $60^\circ$ .

B.  $45^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $135^\circ$ .

**Câu 29.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \frac{(1-m)\sqrt{f(x)+2}+2}{\sqrt{f(x)+2}-m}$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ ?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2(m+3)x^2 + m + 5$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $(C)$  tiếp xúc với trục hoành. Tổng tất cả các phần tử của tập  $S$  bằng:

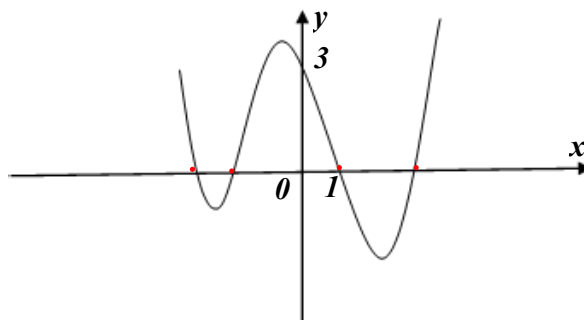
A. -10.

B. -6.

C. -5.

D. -9

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên



Bất phương trình  $f(x) \leq 3x + m$  có nghiệm  $x \in (0; 1)$  khi và chỉ khi

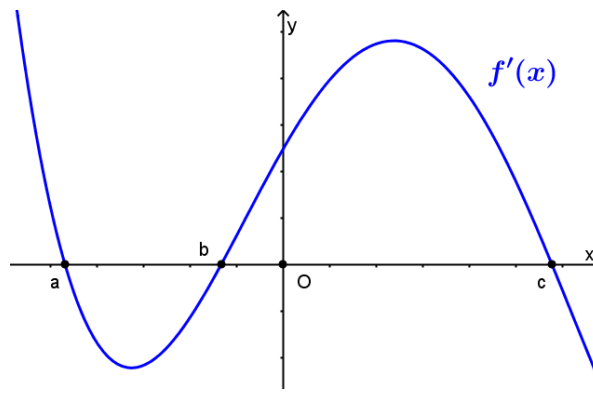
A.  $m > f(0)$ .

B.  $m \geq f(1) - 3$ .

C.  $m \geq f(0)$ .

D.  $m > f(1) - 3$ .

**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị hàm  $f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. So sánh đúng về các giá trị  $f(a), f(b), f(c)$  là



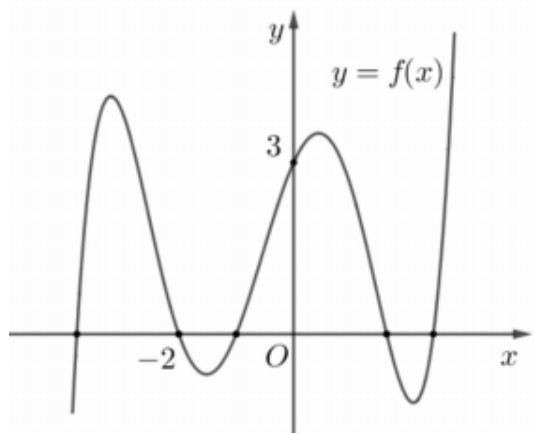
A.  $f(b) < f(a) < f(c)$

B.  $f(a) < f(b) < f(c)$

C.  $f(b) < f(c) < f(a)$

D.  $f(c) < f(b) < f(a)$

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f(|4x+5|-2) - 3 = 0$  là.



A. 8.

B. 4.

C. 10.

D. 6.

**Câu 34.** Cho phương trình  $4^{x^2} - m \cdot 2^{x^2+1} - 3m + 1 = 0$ . Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập  $S$  là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

**Câu 35.** Cho phương trình  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 \geq 0$  ( $m$  là tham số). Tập hợp tất cả các

giá trị của  $m$  để bất phương trình có nghiệm thuộc  $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$  là:

A.  $[-3; +\infty)$ .

B.  $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$

C.  $\left[-3; \frac{7}{3}\right]$

D.  $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$

**Câu 36.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $a$ , cạnh bên  $AA' = 2a$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa  $(BA'C)$  và  $(DA'C)$ . Tính  $\cos \alpha$ .

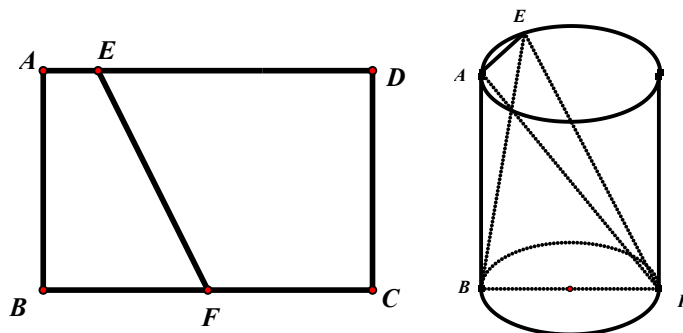
A.  $\cos \alpha = \frac{-1}{4}$ .

B.  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ .

C.  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ .

D.  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ .

**Câu 37.** Cho một miếng tôn mỏng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 4$  dm và  $AD = 6$  dm. Trên cạnh  $AD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = 1$  dm, trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $F$  là trung điểm  $BC$  (tham khảo hình 1). Cuộn miếng tôn lại một vòng sao cho  $AB$  và  $DC$  trùng khít nhau. Khi đó miếng tôn tạo thành mặt xung quanh của hình trụ (tham khảo hình 2). Thể tích  $V$  của tứ diện  $ABEF$  trong hình 2 bằng



Hình 1

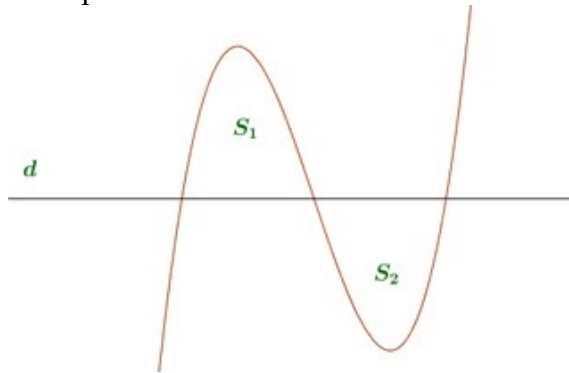
Hình 2

- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \text{dm}^3$ .      B.  $\frac{18\sqrt{3}}{\pi^2} \text{dm}^3$ .      C.  $\frac{54\sqrt{3}}{\pi^2} \text{dm}^3$ .      D.  $\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \text{dm}^3$ .

**Câu 38.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là  $a$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AC'$  cắt các cạnh  $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$  lần lượt tại các điểm  $M, N, P, Q, R, S$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $AMNPQRS$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{15}}{12}$ .      C.  $\frac{5a\sqrt{3}}{24}$ .      D.  $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$ .

**Câu 39.** Cho  $X$  là tập các giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn đường thẳng  $(d): y = -12m - 7$  cùng với đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4x - 1$  tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là  $S_1, S_2$  thỏa mãn  $S_1 = S_2$  (xem hình vẽ). Tích các giá trị của các phần tử của  $X$  là:



- A. 9.      B. -9.      C. 27.      D.  $-\frac{9}{2}$ .

**Câu 40.** Gọi  $X$  là tập chứa các số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số được lập từ  $\{5; 6; 7; 8; 9\}$ . Chọn ngẫu nhiên từ  $X$  ra một số, xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 42 là:

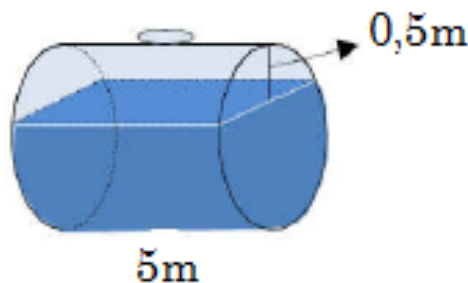
- A.  $\frac{11}{725}$ .      B.  $\frac{13}{1024}$ .      C.  $\frac{7}{625}$ .      D.  $\frac{9}{512}$ .

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $\frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x}$  đồng thời  $f(1) = \frac{1}{e}$ .

Tính giá trị của  $f(2)$ .

- A.  $f(2) = e^{-2}(1 + 2\ln 2)$ .      B.  $f(2) = e^{-2}(3 + 2\ln 2)$ .  
C.  $f(2) = e^{-2}(2 + \ln 3)$ .      D.  $f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2)$ .

**Câu 42.** Một bồn hình trụ chứa dầu được đặt nằm ngang, có chiều dài 5m, bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.



- A.  $11,781\text{m}^3$ .      B.  $12,637\text{m}^3$ .      C.  $14,923\text{m}^3$ .      D.  $8,307\text{m}^3$ .

**Câu 43.** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích  $V$  của khối chóp có thể tích lớn nhất.

- A.  $V = 144$       B.  $V = 576$       C.  $V = 576\sqrt{2}$       D.  $V = 144\sqrt{6}$

**Câu 44.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $a$  | $b$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-5$ | $6$ | $-\infty$ |     |

Đặt  $h(x) = |m - f(x - 2)|$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  sao cho hàm số  $y = h(x)$  có đúng 5 điểm cực trị?

- A. Vô số.      B. 12.      C. 0.      D. 10.

**Câu 45.** Cho  $x, y$  thỏa mãn  $x \geq 1, y \geq 1$  và  $\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$  thuộc tập nào dưới đây?

- A.  $[5; 9)$ .      B.  $[-5; 0)$ .      C.  $[0; 5)$ .      D.  $[9; +\infty)$ .

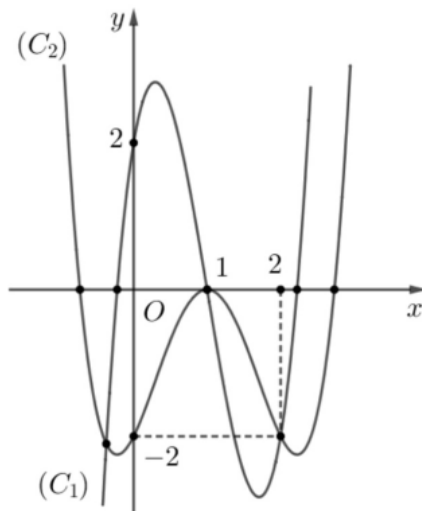
**Câu 46.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh  $BC$  và  $CD$  lần lượt lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $MB = MC$  và  $3NC = 2ND$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AC$  và  $MN$ . Khoảng cách từ điểm  $P$  đến mặt phẳng  $(SAM)$  bằng:

- A.  $\frac{a\sqrt{7}}{9}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{21}}{18}$ .

**Câu 47.** Có tất bao nhiêu số nguyên dương  $y$  sao cho tồn tại số thực  $x \in (1; 8)$  thỏa mãn:  $(x-1)(2e^x - y^2) = y(e^x - x^2)$ ?

- A. 13      B. 12      C. 14      D. 11

**Câu 48.** Cho đa thức  $f(x)$  có đồ thị của hai hàm số  $y = f(x), y = f'(x)$  trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ



Phương trình  $f(x) = me^x$  có hai nghiệm phân biệt trên đoạn  $[0; 2]$  khi và chỉ khi

- A.  $e^{-2}f(2) \leq m < 0$ .    B.  $e^{-2}f(2) < m < 0$ .    C.  $f(0) \leq m < 0$ .    D.  $f(0) \leq m \leq 0$ .

**Câu 49.** Cho khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A'B$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ ; góc giữa  $AA'$  và  $(ABCD)$  bằng  $45^\circ$ . Khoảng cách từ  $A$  đến các đường thẳng  $BB'$ ,  $DD'$  cùng bằng 1. Góc giữa hai mặt phẳng  $(BB'C'C)$  và  $(C'CDD')$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

- A. 2.    B.  $3\sqrt{3}$ .    C.  $2\sqrt{3}$ .    D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 50.** Cho phương trình  $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$  (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$  là khoảng  $(a; +\infty)$ . Khi đó  $a$  thuộc khoảng

- A.  $(3, 8; 3, 9)$ .    B.  $(3, 7; 3, 8)$ .    C.  $(3, 6; 3, 7)$ .    D.  $(3, 5; 3, 6)$ .

..... HẾT .....



**BẢNG ĐÁP ÁN VÀ ĐÁP ÁN CHI TIẾT**

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.C  | 2.D  | 3.A  | 4.C  | 5.D  | 6.A  | 7.D  | 8.D  | 9.C  | 10.D |
| 11.A | 12.D | 13.B | 14.B | 15.A | 16.C | 17.D | 18.B | 19.B | 20.C |
| 21.A | 22.C | 23.C | 24.A | 25.A | 26.B | 27.C | 28.B | 29.B | 30.B |
| 31.D | 32.A | 33.D | 34.B | 35.A | 36.C | 37.D | 38.D | 39.A | 40.C |
| 41.D | 42.B | 43.B | 44.D | 45.A | 46.D | 47.A | 48.A | 49.D | 50.B |

**Câu 1.** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. 4.                                      D. 3.

**Lời giải**

Ta có  $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì  $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2} \ (k_1 \in \mathbb{Z})$ .

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên  $[0; 2\pi]$ .

**Câu 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ , số vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác là

- A. 10.                                      B. 6.                                      C. 4.                                      D. 12.

**Lời giải**

Ta có mỗi vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối là 4 đỉnh của tứ giác là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử nên có  $A_4^2 = 12$  (vector).

**Câu 3.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_4 = 3$  và  $u_7 = 9$ . Tìm số hạng thứ 2022 của cấp số cộng  $(u_n)$ .

- A.  $u_{2022} = 4039$ .                      B.  $u_{2022} = 4035$ .                      C.  $u_{2022} = 4037$ .                      D.  $u_{2022} = 4041$ .

**Lời giải**

Ta có  $\begin{cases} u_4 = 3 \\ u_7 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 3 \\ u_1 + 6d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ .

Vậy  $u_{2022} = u_1 + 2021d = 4039$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-1$ | $+\infty$ |     |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(-\infty; -2)$ .                      B.  $(1; +\infty)$ .                      C.  $(-2; 1)$ .                      D.  $(-1; 2)$ .

**Lời giải**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-2; 1)$

**Câu 5.** Cho số thực  $a > 0; a \neq 1$ ,  $\log_{\sqrt{a}}(a^2 \sqrt[3]{a})$  bằng

A.  $\frac{7}{3}$ .

B.  $\frac{5}{3}$ .

C.  $\frac{10}{3}$ .

D.  $\frac{14}{3}$ .

**Lời giải**

$$\log_{\sqrt{a}}(a^2 \sqrt[3]{a}) = \log_{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} a^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{14}{3}.$$

**Câu 6.** Số cạnh của một hình bát diện đều là

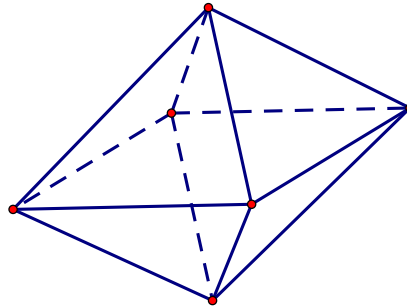
A. 12.

B. 10.

C. 8.

D. 6.

**Lời giải**



Số cạnh của một hình bát diện đều là 12.

**Câu 7.** Khối cầu  $(S)$  có diện tích bằng  $36\pi a^2 (cm^2)$ ,  $(a > 0)$  thì có thể tích là:

A.  $288\pi a^3 (cm^3)$ .

B.  $9\pi a^3 (cm^3)$ .

C.  $108\pi a^3 (cm^3)$ .

D.  $36\pi a^3 (cm^3)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } S = 4\pi R^2 = 36\pi a^2 \Rightarrow R = 3a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (3a)^3 = 36\pi a^3 (cm^3).$$

**Câu 8.** Cho khối nón có chiều cao  $h = 6a$  và bán kính đáy  $r$  bằng một nửa chiều cao  $h$ . Tính thể tích của khối nón đã cho.

A.  $12\pi a^3$ .

B.  $54\pi a^3$ .

C.  $9\pi a^3$ .

D.  $18\pi a^3$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } h = 6a \Rightarrow r = \frac{h}{2} = 3a.$$

$$\text{Thể tích của khối nón: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (3a)^2 6a = 18\pi a^3.$$

**Câu 9.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x - \frac{2}{x^2}$  là

A.  $e^x - \frac{2}{x} + C$ .

B.  $e^x - 2\ln x^2 + C$ .

C.  $e^x + \frac{2}{x} + C$ .

D.  $e^x + \frac{1}{x} + C$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int \left( e^x - \frac{2}{x^2} \right) dx = e^x - 2 \cdot \left( -\frac{1}{x} \right) + C = e^x + \frac{2}{x} + C.$$

**Câu 10.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \cos^2 x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và  $x = \pi$  là

A.  $\frac{\pi}{8}$ .

B.  $\frac{\pi}{6}$ .

C.  $\frac{\pi}{4}$ .

D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

Diện tích S cần tìm:  $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ .

**Câu 11.** Số hạng thứ 9 khai triển  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$  ( $x \neq 0$ ) bằng

A. 495 .

B. -792 .

C. 220 .

D. -220 .

**Lời giải**

Ta có:  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{24-3k}$

Số hạng thứ 9 của khai triển là số hạng ứng với  $k=8$

Do đó hệ số là  $C_{12}^8 \cdot (-1)^8 = 495$

**Câu 12.** Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-5}}$ .

A.  $\frac{3}{5}$ .

B.  $-\frac{3}{5}$ .

C. 5.

D. -5.

**Lời giải**

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{x^2-5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}} = -5.$$

**Câu 13.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ,  $M, N$  là các điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$ ,  $\overrightarrow{NA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng ?

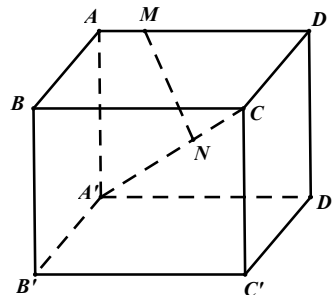
A.  $MN \parallel (AC'B)$ .

B.  $MN \parallel (BC'D)$ .

C.  $MN \parallel (A'C'D)$ .

D.  $MN \parallel (BC'B)$ .

**Lời giải**



Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là ba vec tơ không đồng phẳng và  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{c}$   
 $\overrightarrow{BC'} = \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{BA'} = \vec{a} + \vec{b}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BM}) \Rightarrow \frac{5}{4}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} \\ \Rightarrow \overrightarrow{BM} &= \frac{4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{5} = \frac{4\vec{a} + (\vec{a} + \vec{c})}{5} = \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\overrightarrow{BN} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} = -\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{3}{5}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC},$$

Suy ra  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}$  đồng phẳng mà  $N \notin (BC'D) \Rightarrow MN \parallel (BC'D)$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-5x+4)(x+2)^{2023}$ . Hỏi hàm số  $f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^2(x-1)(x^2-5x+4)(x+2)^{2023} \Leftrightarrow f'(x) = x^2(x-1)(x-1)(x-4)(x+2)^{2023}.$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = x^2(x-1)^2(x-4)(x+2)^{2023}$$

$$\text{Khi đó: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x-4)(x+2)^{2023} = 0 \text{ có:}$$

+)  $x = 0$  là nghiệm kép;

+)  $x = 1$  là nghiệm kép;

+)  $x = 4$  là nghiệm đơn;

+)  $x = -2$  là nghiệm bội lẻ.

Mà  $f'(x)$  chỉ đổi dấu khi  $x$  đi qua nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ.

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

**Câu 15.** Giá trị lớn nhất hàm số  $f(x) = \cos^2 4x - \sin 2x \cos 2x + 4$  trên  $\mathbb{R}$  là

**A.**  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{81}{16}$ .

**B.**  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{9}{2}$ .

**C.**  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$ .

**D.**  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } f(x) = \cos^2 4x - \sin 2x \cos 2x + 4 = -\sin^2 4x - \frac{1}{2} \sin 4x + 5.$$

$$\text{Đặt } t = \sin 4x. \text{ Ta có } x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-1; 1].$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5 \text{ với } t \in [-1; 1].$$

$$g'(t) = -2t - \frac{1}{2}, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$$

$$g(-1) = \frac{9}{2}, \quad g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}, \quad g(1) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} g(t) = \frac{81}{16}.$$

**Câu 16.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$  là

**A.** 3.

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 1.

**Lời giải**

$$\text{TXĐ: } D = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -2$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = 2$$

$\Rightarrow y = \pm 2$  là TCN của đồ thị hàm số.

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} y = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} y = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = +\infty$$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$  là TCD của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

**Câu 17.** Nghiệm của phương trình  $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$  nằm trong khoảng nào sau đây?

A.  $(-1; 0)$ .

B.  $(0; 1)$ .

C.  $(2; 3)$

**D.**  $(4; 5)$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \quad (*).$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2[2(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}. \text{ Tập nghiệm phương trình là } S = \{2 + \sqrt{5}\}$$

**Câu 18.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $2^{x^2-2x-1} \leq 3$  là

A. 2.

**B.** 3.

C. 1.

D. 4.

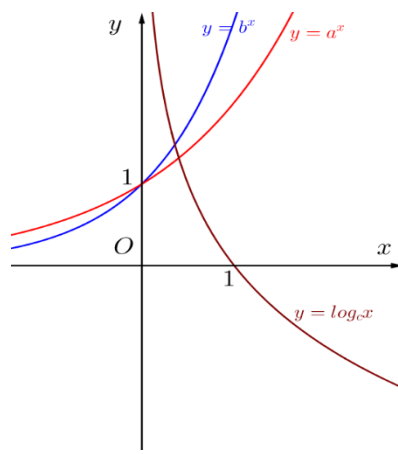
**Lời giải**

$$2^{x^2-2x-1} \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2 \leq \log_2 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq \log_2 12 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{\log_2 12} \leq x \leq 1 + \sqrt{\log_2 12}.$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{0; 1; 2\}.$$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 3.

**Câu 19.** Đồ thị của ba hàm số  $y = a^x$ ,  $y = b^x$ ,  $y = \log_c x$  (với  $a, b, c$  là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng mặt phẳng tọa độ (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây là đúng?



A.  $c > b > a$ .

B.  $b > a > c$ .

C.  $a > b > c$ .

D.  $c > a > b$ .

### Lời giải

Quan sát đồ thị của ba hàm số ta thấy:

Hàm số  $y = a^x$ ,  $y = b^x$  là các hàm số đồng biến. Suy ra  $a > 1$  và  $b > 1$ .

Hàm số  $y = \log_c x$  là hàm nghịch biến. Suy ra  $0 < c < 1$ .

Mặt khác cùng một giá trị của  $x_0 > 0$  thì  $b^{x_0} > a^{x_0}$  ( $a > 1$ ;  $b > 1$ )  $\Rightarrow b > a$ .

Như vậy:  $b > a > c$ .

Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ . Biết  $AC = 2a, BC = a, AA' = 2a\sqrt{3}$ , thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng

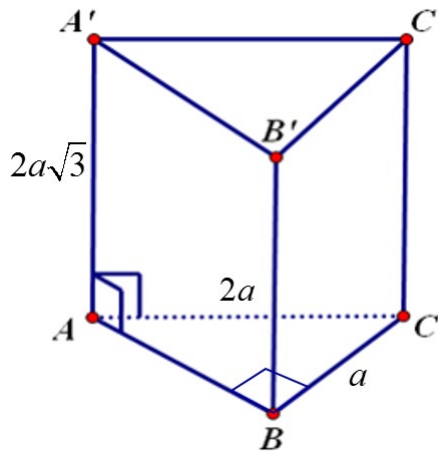
A.  $6a^3$ .

B.  $2a^3$ .

C.  $3a^3$ .

D.  $3a^3\sqrt{3}$ .

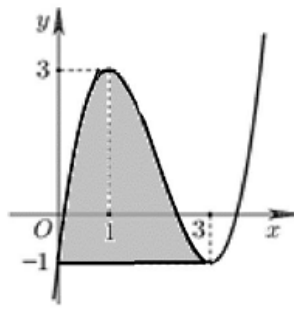
### Lời giải



Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B \Rightarrow BA^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow BA = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^3.$$

Câu 21. Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Diện tích  $S$  của miền được tô đậm như hình được tính theo công thức nào?



**A.**  $S = \int_0^3 (f(x) + 1) dx.$

**B.**  $S = \int_0^3 (f(x) - 1) dx.$

**C.**  $S = \int_{-1}^3 (f(x) + 1) dx.$

**D.**  $S = \int_0^3 |f(x) - 1| dx.$

**Lời giải**

Quan sát hình vẽ ta thấy phần tô đậm được giới hạn bởi các đường:  $\begin{cases} y = f(x) \\ y = -1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ , suy ra diện tích của miền

được tô đậm trong hình vẽ là:

$$S = \int_0^3 |f(x) - (-1)| dx = \int_0^3 (f(x) + 1) dx$$

**Câu 22.** Tập nghiệm của bất phương trình  $(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3}$

**A.**  $(-\infty; -5).$

**B.**  $(-\infty; 0).$

**C.**  $(-5; +\infty).$

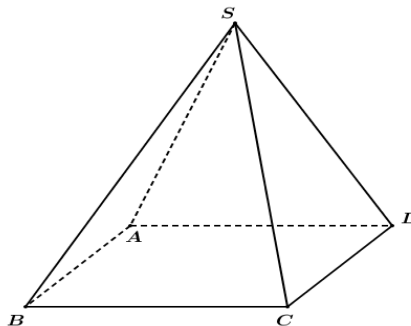
**D.**  $(0; +\infty).$

**Lời giải**

$$(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x-1 < 3x+9 \Leftrightarrow 2x > -10 \Leftrightarrow x > -5.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là  $(-5; +\infty).$

**Câu 23.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh bên bằng  $a\sqrt{3}$ , mặt bên tạo với đáy một góc  $45^\circ$



Thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng

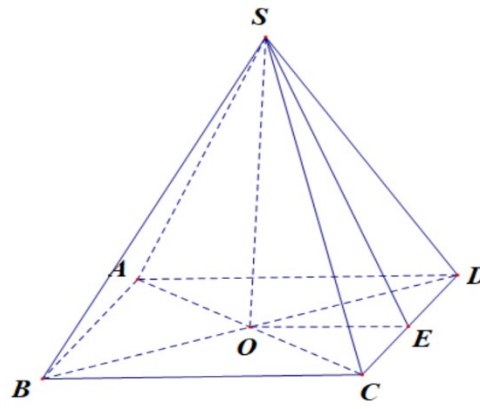
**A.**  $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$

**B.**  $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{2}$

**C.**  $\frac{2a^3}{3}$

**D.**  $\frac{4a^3}{3}$

**Lời giải**



Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ ,  $E$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có  $SO \perp (ABCD)$

$$\widehat{((SCD), (ABCD))} = \widehat{SEO} = 45^\circ$$

Do đó  $\triangle SOE$  vuông cân tại  $O$   $SO = EO = x, x > 0$ .

Ta có:  $SD^2 = SE^2 + ED^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 2x^2 + x^2 \Rightarrow x = a \Rightarrow CD = 2a$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot CD^2 = \frac{4a^3}{3} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{2a^3}{3}$$

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^6 f(x)dx = 9$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^2 f(3x)dx$  bằng

**A.** 3.                                      **B.** 18.                                      **C.** 1.                                      **D.** 27.

**Lời giải**

**Cách 1: Phương pháp đổi biến:**

$$\text{Xét tích phân: } I = \int_0^2 f(3x)dx$$

$$\text{Đặt: } 3x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$$

Đổi cận:

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $t$ | 0 | 6 |

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^6 f(t) \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

$$\textbf{Cách 2: Dùng công thức nhanh: } \int_m^n f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int_{am+b}^{an+b} f(x)dx$$

$$\text{Áp dụng vào bài ta có: } \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$



**Câu 25.** Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3, 4, 5.

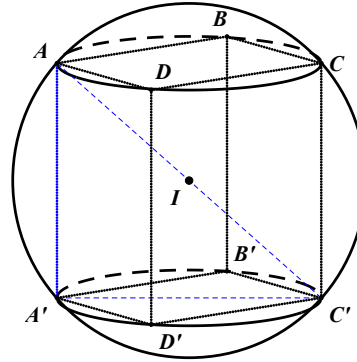
**A.**  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ .

**B.**  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ .

**C.**  $50\pi$ .

**D.**  $50\pi\sqrt{2}$ .

**Lời giải**



Gọi  $R$  là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật.

Ta có  $R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

Thể tích khối cầu  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $\sqrt{2}a$ . Tam giác  $SAD$  cân tại  $S$  và mặt bên  $(SAD)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng  $\frac{4}{3}a^3$ . Tính khoảng cách  $h$  từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$

**A.**  $h = \frac{2}{3}a$

**B.**  $h = \frac{4}{3}a$

**C.**  $h = \frac{8}{3}a$

**D.**  $h = \frac{3}{4}a$

**Lời giải**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Tam giác  $SAD$  cân tại  $S$

$\Rightarrow SI \perp AD$

Ta có  $\begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SI$  là đường cao của hình chóp.

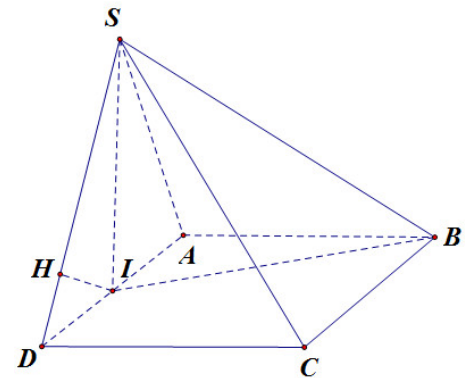
Theo giả thiết

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = \frac{1}{3}SI \cdot 2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$

Vì  $AB$  song song với  $(SCD)$

$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD))$

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  lên  $SD$ .



$$\text{Mặt khác } \begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp DC. \text{ Ta có } \begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH$$

$$\text{Xét tam giác } SID \text{ vuông tại } I: \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD)) = \frac{4}{3}a$$

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = \sqrt{\frac{8\cos 2x - m}{\sin^2 x - 2\sin x + 3}}$  (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-60; 60)$  để tập xác định của hàm số (1) là  $\mathbb{R}$ ?

- A. 68.                      B. 53.                      C. 52.                      D. 69.

**Lời giải**

Ta thấy:  $\sin^2 x - 2\sin x + 3 = (\sin x - 1)^2 + 3 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Để hàm số (1) có tập xác định là  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $8\cos 2x - m \geq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow m \leq 8\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}}(8\cos 2x) \Leftrightarrow m \leq -8.$$

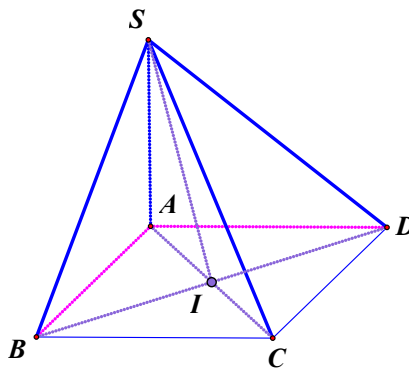
Vì  $m$  nguyên thuộc khoảng  $(-60; 60)$  nên  $m \in \{-59; -58; -57; \dots; -7; -8\}$

Vậy có 52 giá trị nguyên của  $m$  thuộc khoảng  $(-60; 60)$  để hàm số (1) có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = \frac{a}{2}$ , đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ , có  $I$  là giao của hai đường chéo  $AC, BD$ . Góc giữa  $SI$  với  $(ABCD)$  là

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $135^\circ$ .

**Lời giải**



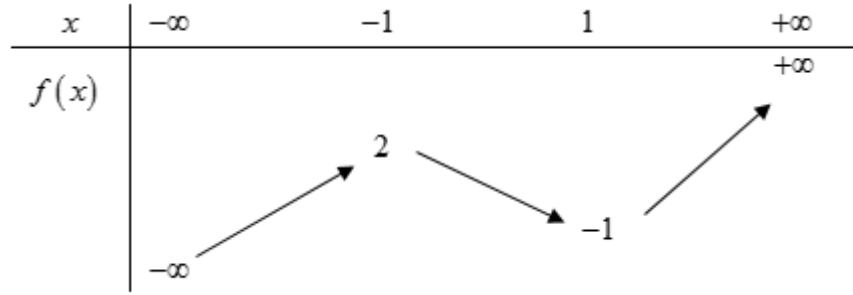
Ta có góc  $\widehat{IAD} = 60^\circ$ ,  $AC \perp BD$ . Khi đó  $\cos \widehat{IAD} = \cos 60^\circ = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AI = \frac{a}{2}$ . Hình chiếu vuông góc của

$SI$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  là  $AI$ . Do đó góc giữa  $SI$  với  $(ABCD)$  là  $\widehat{SIA}$ ,  $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = 1 \Rightarrow \widehat{SIA} = 45^\circ$

.

.

**Câu 29.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $R$  và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \frac{(1-m)\sqrt{f(x)+2}+2}{\sqrt{f(x)+2}-m}$  đồng biến trên khoảng  $(-1;1)$ ?

A. 0.

**B.** 2.

C. 3.

D. 1.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } y' = \left( \sqrt{f(x)+2} \right)' \cdot \frac{(1-m)(-m)-2}{\left( \sqrt{f(x)+2}-m \right)^2} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+2}} \cdot \frac{m^2-m-2}{\left( \sqrt{f(x)+2}-m \right)^2}.$$

Dựa vào BBT của  $f(x)$  suy ra  $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$ , vì vậy hàm số đã cho đồng biến trên  $(-1;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2 < 0 \\ \sqrt{f(x)+2}-m \neq 0, \forall x \in (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq \sqrt{f(x)+2}, \forall x \in (-1;1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \notin (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 1. \text{ Vậy } m \in \{0,1\}.$$

**Câu 30.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2(m+3)x^2 + m + 5$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để  $(C)$  tiếp xúc với trục hoành. Tổng tất cả các phần tử của tập  $S$  bằng:

A. -10.

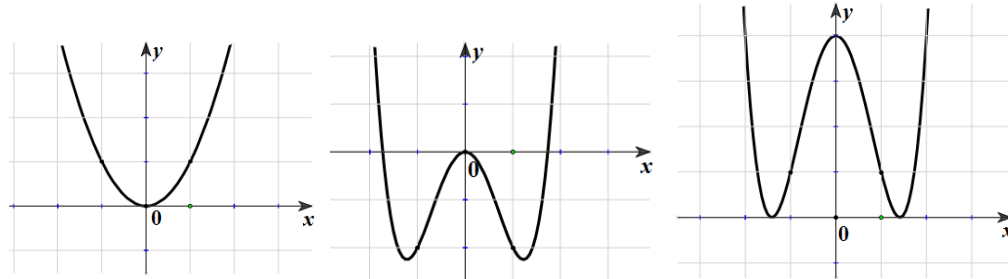
**B.** -6.

C. -5.

D. -9

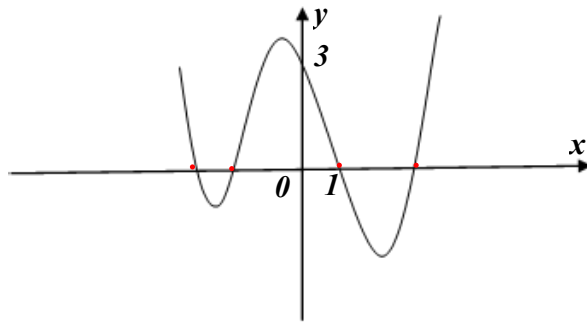
**Lời giải**

Đồ thị  $(C)$  của hàm số tiếp xúc với trục hoành có thể xảy ra trong các trường hợp sau



$$\text{Vì } a = 1 > 0 \text{ nên suy ra } \begin{cases} ab \geq 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} ab < 0 \\ c = 0 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = -5 \\ m = -1; m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-5; -1\}.$$

**Câu 31.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên



Bất phương trình  $f(x) \leq 3x + m$  có nghiệm  $x \in (0;1)$  khi và chỉ khi

A.  $m > f(0)$ .

B.  $m \geq f(1) - 3$ .

C.  $m \geq f(0)$ .

D.  $m > f(1) - 3$ .

**Lời giải**

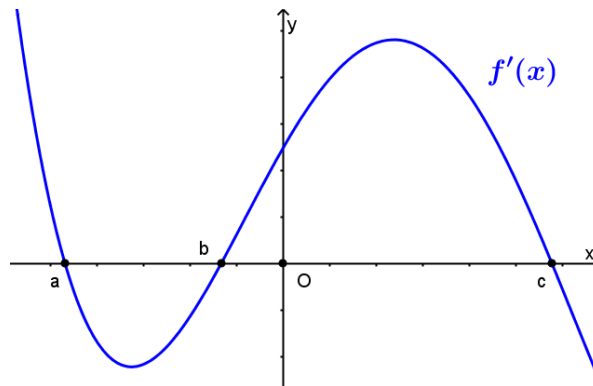
Ta có  $f(x) \leq 3x + m \Leftrightarrow m \geq g(x) = f(x) - 3x$

$g'(x) = f'(x) - 3 < 0, \forall x \in (0;1) \Rightarrow g(1) < g(x) < g(0), \forall x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow f(1) - 3 < g(x) < f(0), \forall x \in (0;1)$ .

Vì vậy (\*) có nghiệm  $x \in (0;1) \Leftrightarrow m > f(1) - 3$

**Câu 32.** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị hàm  $f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. So sánh đúng về các giá trị  $f(a), f(b), f(c)$  là



A.  $f(b) < f(a) < f(c)$

B.  $f(a) < f(b) < f(c)$

C.  $f(b) < f(c) < f(a)$

D.  $f(c) < f(b) < f(a)$

**Lời giải**

Dựa vào bảng biến thiên

| $x$  | $a$    |   | $b$    |   | $c$    |
|------|--------|---|--------|---|--------|
| $y'$ | 0      | - | 0      | + | 0      |
| $y$  | $f(a)$ | ↘ |        | ↗ |        |
|      |        |   | $f(b)$ |   | $f(c)$ |

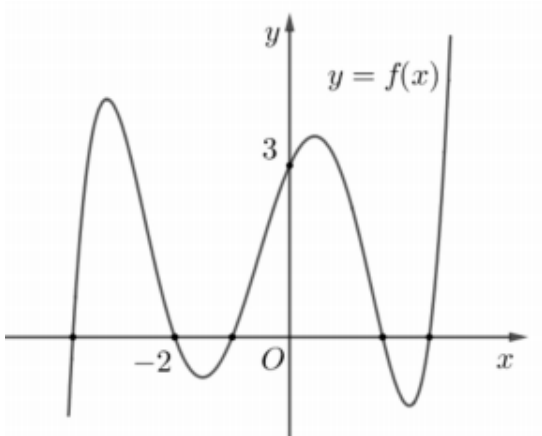
Suy ra  $f(a), f(c) > f(b)$

Thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $f'(x)$  với trục hoành từ  $a$  đến  $b$  nhỏ hơn từ  $b$  đến  $c$

Suy ra  $\int_a^b (-f'(x)) dx < \int_b^c f'(x) dx \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$

Suy ra  $f(b) < f(a) < f(c)$

**Câu 33.** Cho hàm số  $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f(|4x + 5| - 2) - 3 = 0$  là.



- A. 8.
- B. 4.
- C. 10.
- D. 6.**

**Lời giải**

Đặt  $t = |4x + 5| - 2$ , Phương trình trở thành:  $f(t) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 3$ .

Kẻ đường thẳng  $y = 3$  cắt đồ thị  $y = f(x)$  tại 5 điểm phân biệt có hoành độ  $m, n, 0, p, q$  với  $m < n < -2 < 0 < p < q$ .

Vậy,  $f(t) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m < -2 \\ t = n < -2 \\ t = 0 \\ t = p > 0 \\ t = q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4x + 5| - 2 = m < -2 \Rightarrow VN \\ |4x + 5| - 2 = n < -2 \Rightarrow VN \\ |4x + 5| - 2 = 0 \Rightarrow 2N_0 \\ |4x + 5| - 2 = p > 0 \Rightarrow 2N_0 \\ |4x + 5| - 2 = q > 0 \Rightarrow 2N_0 \end{cases}.$

Vậy số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f(|4x + 5| - 2) - 3 = 0$  bằng 6.

**Câu 34.** Cho phương trình  $4^{x^2} - m.2^{x^2+1} - 3m + 1 = 0$ . Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập  $S$  là

- A. 1.
- B. 0.**
- C. 2.
- D. 3.

**Lời giải**

Đặt  $t = 2^{x^2} \geq 1$ . Phương trình trở thành:  $f(t) = t^2 - 2mt - 3m + 1 = 0 \quad (1)$

Để có 4 nghiệm  $x$  phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

**Cách 1:**

Khi đó phải có:  $t_2 > t_1 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 3m - 1 > 0 \\ f(1) = 1 - 5m + 1 > 0 \\ t_2 + t_1 = 2m + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 3m - 1 > 0 \\ m < \frac{5}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow VN$

**Cách 2:**  $(1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{2t + 3} = m \quad (2)$ , xét  $g(t) = \frac{t^2 + 1}{2t + 3}$ ,  $g'(t) = \frac{2t^2 + 6t - 2}{(2t + 3)^2} > 0, \forall t > 1$ .

Bảng biến thiên

|         |               |           |
|---------|---------------|-----------|
| $t$     | 1             | $+\infty$ |
| $g'(t)$ |               | +         |
| $g(t)$  | $\frac{2}{5}$ | $+\infty$ |

Theo bảng biến thiên ta thấy không tồn tại  $m$  để (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

- Câu 35.** Cho phương trình  $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m-4 \geq 0$  ( $m$  là tham số). Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để bất phương trình có nghiệm thuộc  $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$  là:
- A.**  $[-3; +\infty)$  .      **B.**  $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$       **C.**  $\left[-3; \frac{7}{3}\right]$       **D.**  $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$

**Lời giải**

ĐK:  $x > 2$

$$\begin{aligned} & (m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4(m-1)\log_2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m-1 \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt  $\log_2(x-2) = t$  vì  $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Bài toán trở thành tìm  $m$  để bất phương trình  $(m-1)t^2 + (m-5)t + m-1 \geq 0$  có nghiệm  $t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) \geq t^2 + 5t + 1 \text{ có nghiệm } t \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 - t + 1} \text{ có nghiệm } t \in [-1; 1]$$

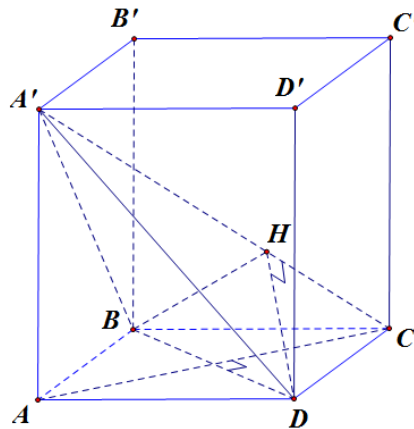
$$\Leftrightarrow m \geq \min_{t \in [-1; 1]} f(t) \text{ với } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

$$\Leftrightarrow m \geq -3$$

- Câu 36.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $a$ , cạnh bên  $AA' = 2a$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa  $(BA'C)$  và  $(DA'C)$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**A.**  $\cos \alpha = \frac{-1}{4}$ .      **B.**  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ .      **C.**  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ .      **D.**  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ .

**Lời giải**



Ta có  $(BA'C) \cap (A'DC) = A'C$ .

Do  $DB \perp AC \Rightarrow DB \perp A'C$ .

Kẻ  $DH \perp A'C$ .

Suy ra  $(DBH) \perp A'C$ .

Ta có  $(BDH) \cap (A'BC) = BH$ ;  $(BDH) \cap (A'CD) = DH$ .

$$\Rightarrow \alpha = \left( \widehat{BA'C}; \widehat{DA'C} \right) = \left( \widehat{BH}; \widehat{DH} \right).$$

Xét  $\triangle A'DC$  có  $\widehat{D} = 90^\circ$ ;  $CD = a$ ,  $DA' = a\sqrt{5}$ .

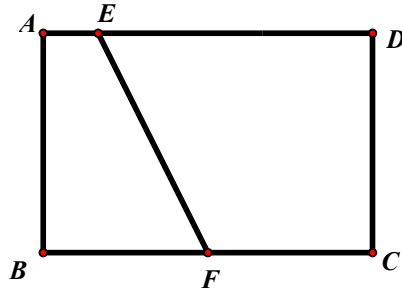
$$\text{Ta có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA'^2} + \frac{1}{CD^2} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{Tương tự ta có } BH = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$$

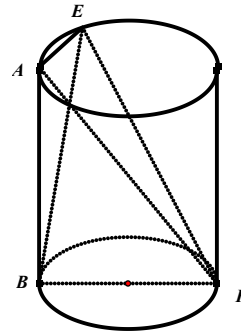
$$\text{Xét } \triangle BDH \text{ có } BH = DH = \frac{a\sqrt{30}}{6}; BD = a\sqrt{2} \Rightarrow \cos \widehat{BHD} = \frac{DH^2 + BH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} = \frac{-1}{5}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \left| \cos \widehat{BHD} \right| = \frac{1}{5}.$$

**Câu 37.** Cho một miếng tôn mỏng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 4\text{ dm}$  và  $AD = 6\text{ dm}$ . Trên cạnh  $AD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = 1\text{ dm}$ , trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $F$  là trung điểm  $BC$  (tham khảo hình 1). Cuộn miếng tôn lại một vòng sao cho  $AB$  và  $DC$  trùng khít nhau. Khi đó miếng tôn tạo thành mặt xung quanh của hình trụ (tham khảo hình 2). Thể tích  $V$  của tứ diện  $ABEF$  trong hình 2 bằng



Hình 1



Hình 2

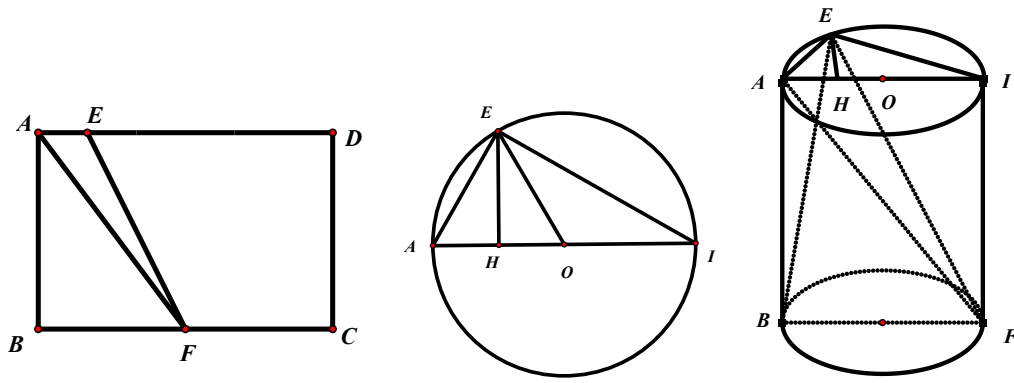
A.  $\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ dm}^3$ .

B.  $\frac{18\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ dm}^3$ .

C.  $\frac{54\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ dm}^3$ .

**D.**  $\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ dm}^3$ .

**Lời giải**



Gọi  $R$  là bán kính đáy của hình trụ.

Gọi  $O$  là tâm đường tròn đáy của hình trụ.

Gọi  $I$  là điểm sao cho  $ABFI$  là hình chữ nhật.  $\triangle AEI$  vuông tại  $E$ .

Đường tròn đáy của hình trụ có chu vi là  $6 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{3}{\pi}$ .

Có  $AE = \frac{1}{6} AD \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^\circ$ . Suy ra  $\triangle AOE$  là tam giác đều cạnh  $R = \frac{3}{\pi}$ .

Vẽ  $EH \perp AI$ ,  $H \in AI$ ,  $EH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

Có  $\begin{cases} EH \perp AI \\ EH \perp AB \end{cases} \Rightarrow EH \perp (ABFI)$ .

Có  $S_{ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{\pi} = \frac{12}{\pi}$ .

Có  $V = V_{ABEF} = \frac{1}{3} EH \cdot S_{ABF} = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}$ .

Vậy  $V = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ dm}^3$ .

**Câu 38.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh là  $a$ . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AC'$  cắt các cạnh  $BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B$  lần lượt tại các điểm  $M, N, P, Q, R, S$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A.MNPQRS$  bằng

A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

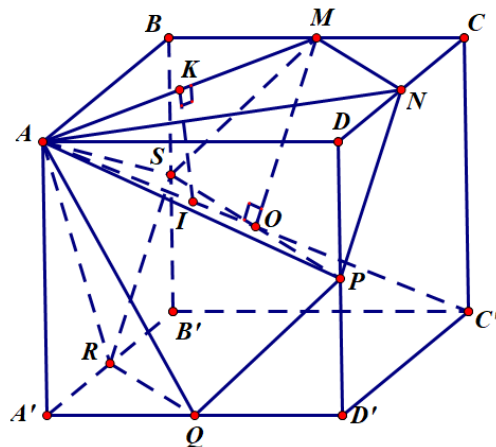
B.  $\frac{a\sqrt{15}}{12}$ .

C.  $\frac{5a\sqrt{3}}{24}$ .

**D.**  $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$ .

**Lời giải**





Gọi  $O, M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $AC'; BC; CD; DD'; D'A'; A'B'; B'B$ .

Ta có  $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = MC'$  suy ra  $M$  thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AC'$ . Chứng minh tương tự ta có  $N, P, Q, R, S \in K$ . Do đó,  $(MNPQRS)$  là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AC'$ .

Ta có:  $MN = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $AO = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CC'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$\Rightarrow OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  suy ra  $MN = OM = ON$  hay tam giác  $OMN$  là tam

giác đều. Chứng minh tương tự suy ra lục giác  $MNPQRS$  là lục giác đều.

Hình chóp  $AMNPQRS$  có các cạnh bên bằng nhau và đáy là đa giác đều nên  $AMNPQRS$  là hình chóp đều.

Gọi  $K$  là trung điểm của  $AM$ , khi đó mặt phẳng trung trực của  $AM$  đi qua trung điểm  $K$  và cắt  $AO$  tại  $I \Rightarrow IA = IM = IN = IP = IQ = IR = IS$ , nên  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $AMNPQRS$ .

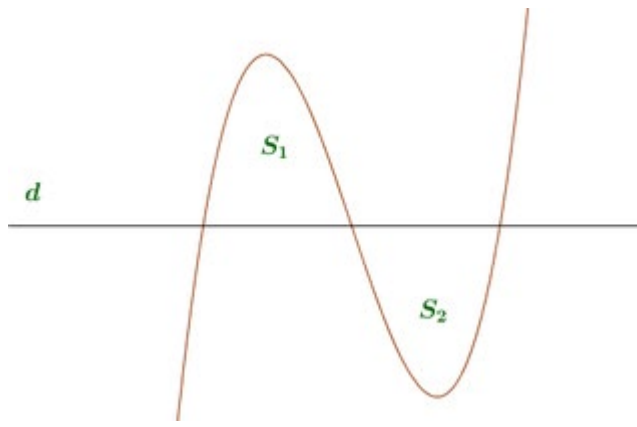
Ta có  $\triangle AKI \sim \triangle AOM$  nên  $\frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI = \frac{AM^2}{2AO}$ .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $AMNPQRS$ :  $r = AI = \frac{AM^2}{2AO} = \frac{5a^2}{8} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$ .

**Tổng quát:** Cho hình chóp đều có độ dài cạnh bên là  $b$ , chiều cao là  $h$  thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $r = \frac{b^2}{2h}$ .

**Câu 39.** Cho  $X$  là tập các giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn đường thẳng  $(d): y = -12m - 7$  cùng với đồ thị  $(C)$  của

hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4x - 1$  tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là  $S_1, S_2$  thỏa mãn  $S_1 = S_2$  (xem hình vẽ). Tích các giá trị của các phần tử của  $X$  là:



**A.** 9.

**B.** -9.

**C.** 27.

**D.**  $-\frac{9}{2}$ .

**Lời giải**

Xét phương trình:  $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4x - 1 = -12m - 7 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4x + 12m + 6 = 0$  (\*).

Xét  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 4x - 1$ . Ta có  $f'(x) = x^2 - 2mx - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m$ .

Khi đó (\*) phải có ba nghiệm phân biệt thứ tự từ bé tới lớn là  $x_1, x_2, x_3$  và  $x_2$  chính là hoành độ của tâm đối xứng. Tức là  $x_2 = m$  và  $x_2$  thỏa mãn (\*):

$$\frac{1}{3}m^3 - m.m^2 - 4m + 12m + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3 - m.m^2 - 4m + 12m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ m = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Thử lại:  $m = -3, m = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, m = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$  thay vào (\*) thì phương trình có ba nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

$$\text{Vậy tích các giá trị là } -3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) = 9.$$

**Câu 40.** Gọi  $X$  là tập chứa các số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số được lập từ  $\{5; 6; 7; 8; 9\}$ . Chọn ngẫu nhiên từ  $X$  ra một số, xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 42 là:

**A.**  $\frac{11}{725}$ .

**B.**  $\frac{13}{1024}$ .

**C.**  $\frac{7}{625}$ .

**D.**  $\frac{9}{512}$ .

**Lời giải**

Dễ dàng có được số phần tử của tập  $X$  là:  $5^5 = 3125$ .

Gọi  $Y$  là tập chứa các số tự nhiên có 5 chữ số  $\overline{abcde} \Rightarrow a + b + c + d + e = 42$ .

Nếu  $\overline{abcde}$  chỉ chứa tối đa 1 chữ số 9, suy ra:

$$42 = a + b + c + d + e \leq 9 + 8 + 8 + 8 + 8 = 41 \text{ ( vô lý ).}$$

Suy ra  $\overline{abcde}$  chứa ít nhất 2 chữ số "9".

**TH1:**  $\overline{abcde}$  chứa 2 chữ số 9, suy ra:  $\overline{abcde}$  = hoán vị của 99888. Có tất cả  $\frac{5!}{3!.2!}$  số.

**TH2:**  $\overline{abcde}$  chứa 3 chữ số 9, suy ra:  $\overline{abcde}$  = hoán vị của 99987. Có tất cả  $\frac{5!}{3!}$  số.

**TH3:**  $\overline{abcde}$  chứa 4 chữ số 9, suy ra:  $\overline{abcde}$  = hoán vị của 99996. Có tất cả  $\frac{5!}{4!}$  số.

Từ 3 trường hợp trên, dễ thấy rằng  $Y \subset X$ .

Suy ra số phần tử của tập  $Y$  là:  $\frac{5!}{3!.2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} = 35$ .

Suy ra xác suất cần tính là:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{35}^1}{C_{3125}^1} = \frac{35}{3125} = \frac{7}{625}$ .

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $\frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x}$  đồng thời  $f(1) = \frac{1}{e}$ .

Tính giá trị của  $f(2)$ .

A.  $f(2) = e^{-2}(1 + 2 \ln 2)$ .

B.  $f(2) = e^{-2}(3 + 2 \ln 2)$ .

C.  $f(2) = e^{-2}(2 + \ln 3)$ .

D.  $f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2)$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x} \Leftrightarrow f(x) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) + \frac{e^x}{x} f'(x) = \frac{1}{x}$$

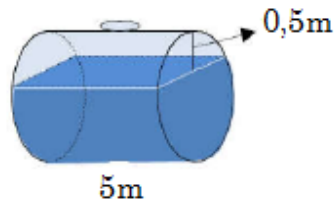
$$\Leftrightarrow \left(f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right)' = \frac{1}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int_1^2 \left(f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \ln x \Big|_1^2 \Leftrightarrow f(2) \cdot \frac{e^2}{2} - e \cdot f(1) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow f(2) = \frac{2 \ln 2}{e^2} + \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2).$$

**Câu 42.** Một bồn hình trụ chứa dầu được đặt nằm ngang, có chiều dài 5m, bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.



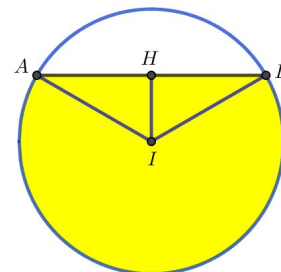
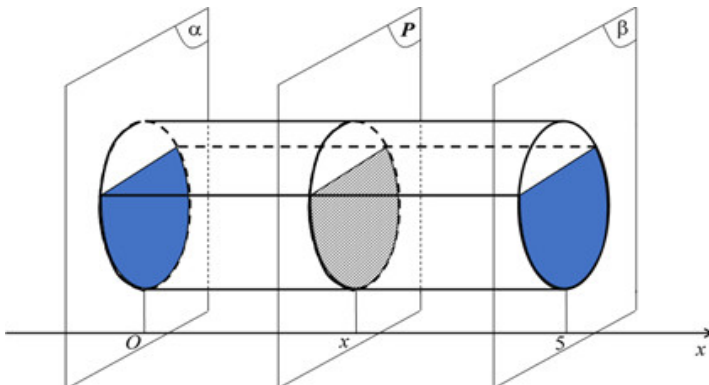
A.  $11,781\text{m}^3$ .

B.  $12,637\text{m}^3$ .

C.  $14,923\text{m}^3$ .

D.  $8,307\text{m}^3$ .

**Lời giải**



Gọi  $(\alpha), (\beta)$  là hai mặt phẳng chứa hai đáy của hình trụ.  $(\alpha), (\beta)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại điểm có tọa độ  $x=0, x=5$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x \in [0;5]$ . Thiết diện của  $(P)$  với phần dầu còn lại là một phần hình tròn có bán kính  $1m$ , (phần tô màu vàng).

$$\text{Có } IH = \frac{1}{2} \Rightarrow HA = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2AH = \sqrt{3}.$$

$$\cos \widehat{AIH} = \frac{IH}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AIH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 120^\circ.$$

$$\text{Diện tích phần không được tô màu trong hình vẽ là } S_1 = S_{quat} - S_{IAB} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} - \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ta có diện tích thiết diện là } S = \pi - S_1 = \pi - \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Vậy thể tích phần dầu còn lại là: } V = \int_0^5 \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12} dx = \frac{40\pi + 15\sqrt{3}}{12} \text{ (đơn vị } m^3)$$

$$V \approx 12,637 m^3.$$

**Câu 43.** Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích  $V$  của khối chóp có thể tích lớn nhất.

**A.**  $V = 144$

**B.**  $V = 576$

**C.**  $V = 576\sqrt{2}$

**D.**  $V = 144\sqrt{6}$

**Lời giải**

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là  $x; h$  ( $x, h > 0$ ). Ta có đáy là hình vuông với độ dài nửa đường chéo bằng  $\frac{x}{\sqrt{2}}$  suy ra độ dài cạnh bên  $l = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{2}}$ .

$$\text{Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } R = \frac{l^2}{2h} = \frac{h^2 + \frac{x^2}{2}}{2h} = 9 \Leftrightarrow x^2 = 36h - 2h^2.$$

$$\text{Diện tích đáy của hình chóp } S = x^2 \text{ nên } V = \frac{1}{3} h \cdot x^2 = \frac{1}{3} h (36h - 2h^2)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} h (36h - 2h^2) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot h (36 - 2h) \leq \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{h + h + 36 - 2h}{3} \right)^3 = 576 \Rightarrow V \leq 576, \text{ dấu bằng xảy ra khi}$$

$$h = h = 36 - 2h \Leftrightarrow h = 12, x = 12 \text{ vậy } V_{\max} = 576.$$

**Câu 44.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $a$  | $b$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-5$ | $6$ | $-\infty$ |     |

Đặt  $h(x) = |m - f(x-2)|$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  sao cho hàm số  $y = h(x)$  có đúng 5 điểm cực trị?

A. Vô số.

B. 12.

C. 0.

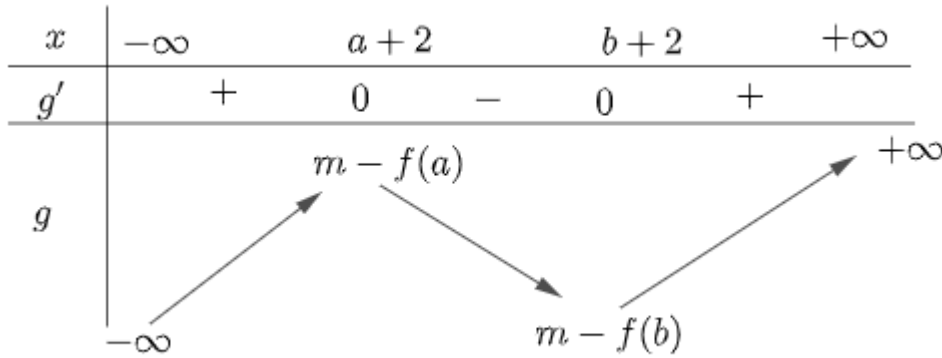
D. 10.

**Lời giải**

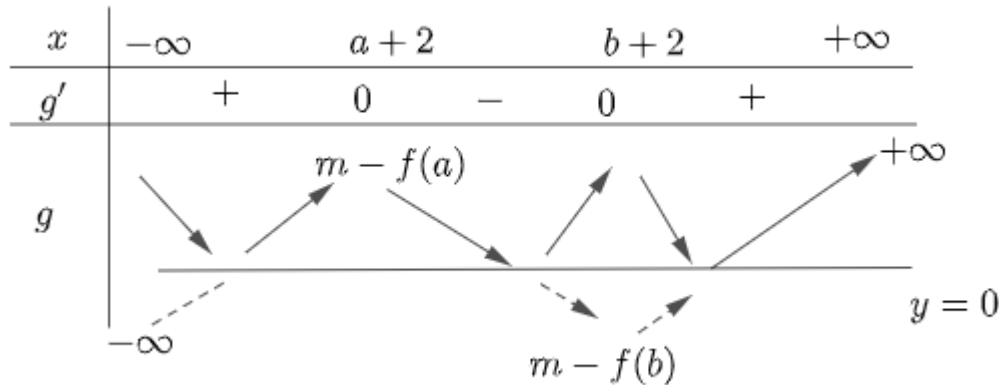
Ta có  $g(x) = m - f(x-2) \Rightarrow g'(x) = -f'(x-2)$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=a \\ x-2=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+a \\ x=2+b \end{cases}$$

BBT



Bảng xét dấu  $h(x)$



$$\text{Để hàm số có 5 cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} m - f(a) > 0 \\ m - f(b) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) < m \\ f(b) > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 6$$

Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; \dots; 5\}$ .

Vậy có 10 giá trị của  $m$ .

**Câu 45.** Cho  $x, y$  thỏa mãn  $x \geq 1, y \geq 1$  và  $\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \text{ thuộc tập nào dưới đây?}$$

A.  $[5; 9)$ .

B.  $[-5; 0)$ .

C.  $[0; 5)$ .

D.  $[9; +\infty)$ .

**Lời giải**

$$\text{Với } x \geq 1, y \geq 1 \text{ suy ra: } \begin{cases} x+y \geq 2 \\ 4xy \geq 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(4xy) = 4xy - 3(x+y) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + 1 + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x+3y) + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy (*).$$

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t$  trên  $(0; +\infty)$ .

Do  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$  với  $\forall t \in (0; +\infty)$  nên hàm số  $y = f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Suy ra: } (*) \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(4xy) \Leftrightarrow 3(x+y) = 4xy.$$

$$\text{Ta có: } 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 3(x+y) \leq (x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq 3 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } x \geq 1, y \geq 1 \text{ nên: } (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy + 1 \geq x + y \Leftrightarrow 4(xy+1) \geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) + 4 \geq 4(x+y) \Leftrightarrow x+y \leq 4 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 3 \leq x+y \leq 4.$$

$$P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (x+y)^2 - 2xy - \frac{3(x+y)}{xy} = (x+y)^2 - \frac{3}{2}(x+y) - 4.$$

$$\text{Đặt } x+y=t \Rightarrow t \in [3;4]. \text{ Hàm số } g(t) = t^2 - \frac{3}{2}t - 4 \text{ có } g'(t) = 2t - \frac{3}{2} > 0 \text{ với } \forall t \in [3;4],$$

$$\text{suy ra } g(t) \leq g(4) = 6.$$

$$\text{Vậy } \max P = 6 \text{ khi } x=1; y=3 \text{ hoặc } x=3; y=1.$$

**Câu 46.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh  $BC$  và  $CD$  lần lượt lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $MB = MC$  và  $3NC = 2ND$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AC$  và  $MN$ . Khoảng cách từ điểm  $P$  đến mặt phẳng  $(SAM)$  bằng:

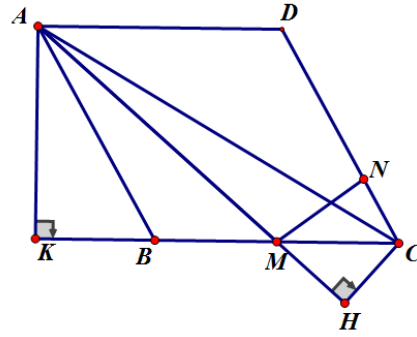
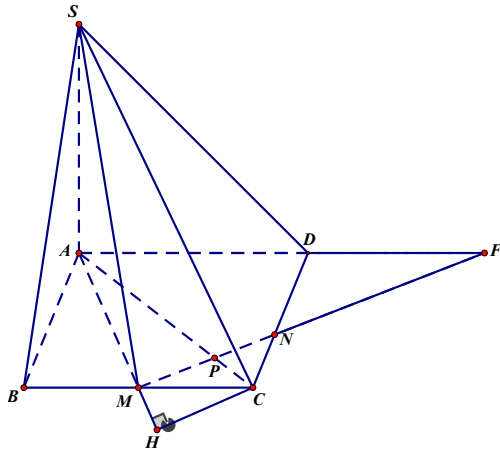
A.  $\frac{a\sqrt{7}}{9}$ .

B.  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ .

**D.**  $\frac{a\sqrt{21}}{18}$ .

**Lời giải**



Dựng  $CH \perp AM \Rightarrow CH \perp (SAM)$

Giả sử  $MN$  cắt  $AD$  tại  $F$ . Theo định lý Talet ta có:

$$\frac{DF}{MC} = \frac{ND}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow DF = \frac{3MC}{2} = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{PA}{PC} = \frac{AF}{MC} = \frac{a + \frac{3}{4}a}{\frac{a}{2}} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{CA}{PC} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Do đó } d(P, (SAM)) = \frac{7}{9} d(C, (SAM)) = \frac{7}{9} CH.$$

Kẻ  $AK \perp BC$

$$\text{Ta có } AK = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad BK = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a.$$

$$\Rightarrow KM = BK + BM = a \Rightarrow AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle AKM \sim \triangle CHM \Rightarrow \frac{AK}{CH} = \frac{AM}{CM}.$$

$$\Rightarrow AK \cdot MC = CH \cdot AM \Rightarrow CH = \frac{AK \cdot MC}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$d(P, (SAM)) = \frac{7}{9} CH = \frac{7}{9} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{14} = \frac{a\sqrt{21}}{18}.$$

**Câu 47.** Có tất bao nhiêu số nguyên dương  $y$  sao cho tồn tại số thực  $x \in (1; 8)$  thỏa mãn:  $(x-1)(2e^x - y^2) = y(e^x - x^2)$ ?

**A.** 13

**B.** 12

**C.** 14

**D.** 11

**Lời giải**

Xét  $f(x) = (x-1)(2e^x - y^2) - y(e^x - x^2)$  trên  $(1; 8)$  với  $y$  là tham số.

$$\text{Ta có } f'(x) = 2xe^x - ye^x - y^2 + 2yx = (e^x + y)(2x - y) = 0 \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

Ta thấy:  $f(1) = -y(e-1) < 0$

do  $y$  nguyên dương;  $f(8) = 7(2e^8 - y^2) - y(e^8 - 64) = -7y^2 - (e^8 - 64)y + 14e^8$

TH1. Khi  $\frac{y}{2} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ . Lập bảng biến thiên cho  $f(x)$ , từ yêu cầu bài toán  $\Rightarrow f(8) > 0 \Rightarrow y < 13,85$

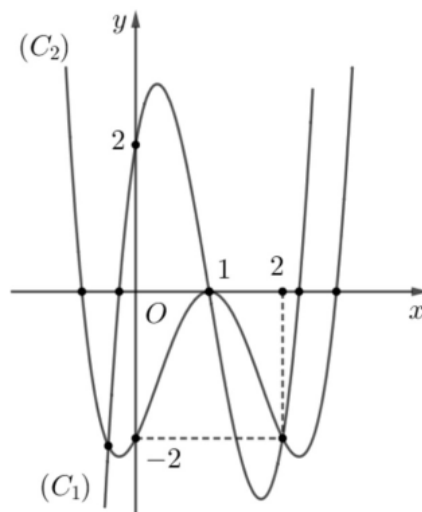
$$\Rightarrow y \in \{1; 2\}$$

TH2. Khi  $\frac{y}{2} \geq 8 \Leftrightarrow y \geq 16 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(8) < f(1) < 0$  suy ra pt vô nghiệm trên  $(1; 8)$ .

TH3. Khi  $1 < \frac{y}{2} < 8 \Leftrightarrow 2 < y < 16 \Rightarrow x_{CT} = \frac{y}{2}$ . Lập bảng biến thiên cho  $f(x)$ , từ yêu cầu bài toán  $\Rightarrow f(8) > 0 \Rightarrow y < 13,85 \Rightarrow y \in \{3; 4; 5; \dots; 13\}$

Như vậy có tất cả 13 giá trị  $y$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 48.** Cho đa thức  $f(x)$  có đồ thị của hai hàm số  $y = f(x), y = f'(x)$  trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ



Phương trình  $f(x) = me^x$  có hai nghiệm phân biệt trên đoạn  $[0; 2]$  khi và chỉ khi

**A.**  $e^{-2}f(2) \leq m < 0$ .    **B.**  $e^{-2}f(2) < m < 0$ .    **C.**  $f(0) \leq m < 0$ .    **D.**  $f(0) \leq m \leq 0$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta suy ra  $(C_2)$  là đồ thị hàm bậc 4,  $(C_1)$  là đồ thị hàm bậc 3.

Do đó  $(C_2)$  là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  và  $(C_1)$  là đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ .

Phương trình  $f(x) = me^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = m$ .

Xét hàm số  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$  với  $x \in [0; 2]$ .

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}.$$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < 0 \text{ (l)} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

| $x$     | 0 | 1 | 2 |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ |   | + | 0 | - | 0 |
| $g(x)$  |   |   |   |   |   |

Dựa vào BBT suy ra phương trình

$$\frac{f(x)}{e^x} = m \text{ có 2 nghiệm phân biệt trên đoạn } [0; 2] \Leftrightarrow e^{-2} f(2) \leq m < 0.$$

**Câu 49.** Cho khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A'B$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ ; góc giữa  $AA'$  và  $(ABCD)$  bằng  $45^\circ$ . Khoảng cách từ  $A$  đến các đường thẳng  $BB'$ ,  $DD'$  cùng bằng 1. Góc giữa hai mặt phẳng  $(BB'C'C)$  và  $(C'CDD')$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

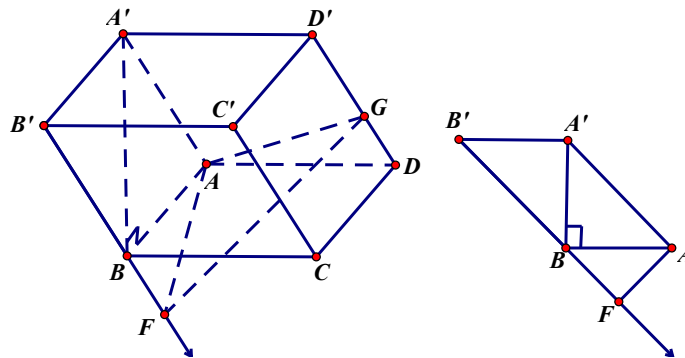
A. 2.

B.  $3\sqrt{3}$ .

C.  $2\sqrt{3}$ .

**D.**  $\sqrt{3}$ .

Lời giải



Dựng  $AF \perp BB'$ ,  $AG \perp DD'$ .

Theo giả thiết vì  $A'B \perp (ABCD)$  nên  $A'A$  có hình chiếu là  $AB$  trên  $(ABCD)$  vậy  $(A'A, (ABCD)) = (A'A, AB) = \widehat{A'AB} = 45^\circ$ .

Vậy tam giác  $AA'B$  vuông cân tại  $B$ , vì  $AF \perp BB'$  nên tam giác  $ABF$  vuông cân tại  $F$ , do  $\widehat{BAF} + \widehat{BAA'} = 90^\circ$ . Vì vậy  $AF = 1 \Rightarrow AB = \sqrt{2}, A'B = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABB'A'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ .

Mặt khác  $((BB'C'C), (C'CDD')) = ((AA'D'D), (AA'B'B)) = (AG, AF) = 60^\circ$ .

$\Rightarrow$  Tam giác  $AFG$  đều cạnh 1. (chú ý rằng  $\begin{cases} (AA'D'D) \cap (AA'B'B) = AA', \\ AF \perp AA', AF \subset (AA'B'B), \\ AG \perp AA', AG \subset (AA'D'D) \end{cases}$ )

Vì vậy nếu  $GH \perp AF$  thì  $GH \perp (AA'B'B)$ ,  $GH = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy thể tích khối lăng trụ là  $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

**Câu 50.** Cho phương trình  $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$  (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$  là khoảng  $(a; +\infty)$ . Khi đó  $a$  thuộc khoảng

A.  $(3, 8; 3, 9)$ .

B.  $(3, 7; 3, 8)$ .

C.  $(3, 6; 3, 7)$ .

D.  $(3, 5; 3, 6)$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > -1$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow [\ln(x+1)+1] \cdot [m \cdot \ln(x+1) - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{e} - 1 & (L) \\ m = \frac{x+2}{\ln(x+1)} = g(x) \end{cases}$$

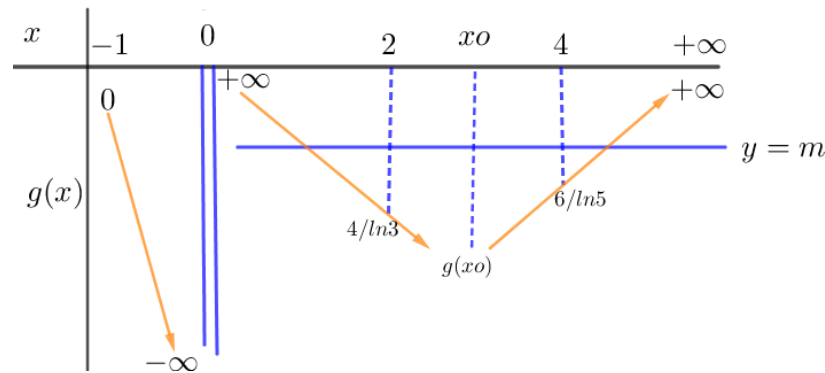
$$g'(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - (x+2)}{(x+1) \cdot \ln^2(x+1)}$$

Ta có  $g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 0)$

Đặt  $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+2)$

Có  $h'(x) = \ln(x+1) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow h(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_0 \in (0; +\infty)$  ( $x_0 \approx 2,6$ ).

Bảng biến thiên (có  $g(x_0) \approx 3,6$ )



Vậy  $m > \frac{6}{\ln 5}$ .