

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A.** $m > e$. **B.** $0 < m \leq 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.
- Câu 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$.
- A.** $(-\infty; -2)$. **B.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.
- Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để hàm số $y = f(x) = (x+1)\ln x + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0; e^2)$.
- A.** 2029. **B.** 2022. **C.** 2025. **D.** 2027.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)(x - 3)$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại?
- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là
- A.** $V = \frac{1}{3}a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{2}{3}a^3$. **D.** $V = \frac{3a^3}{2}$.
- Câu 6.** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng
- A.** 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$.
- Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC . Biết $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng
- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- Câu 8.** Cho mặt cầu có diện tích bằng $72\pi(\text{cm}^2)$. Bán kính R của khối cầu bằng:
- A.** $R = \sqrt{6}(\text{cm})$. **B.** $R = 3\sqrt{2}(\text{cm})$. **C.** $R = 6(\text{cm})$. **D.** $R = 3(\text{cm})$.
- Câu 9.** Cho hình hình đa diện đều loại $\{3; 3\}$ có cạnh bằng a . Gọi S là diện tích tất cả các mặt của hình đa diện (H) có đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình đa diện trên. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = 2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 10.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là
- A.** $4\sqrt{2} - 1$ và 7. **B.** 2 và 4. **C.** $4\sqrt{2}$ và 8. **D.** $\sqrt{2}$ và 2.
- Câu 11.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 HS nam và 4 HS nữ vào một dãy ghế sao cho: HS nam ngồi kề nhau, HS nữ ngồi kề nhau?
- A.** 362880. **B.** 48. **C.** 17280. **D.** 34560.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 100 của cấp số.

A. $u_{100} = -243$.

B. $u_{100} = -295$.

C. $u_{100} = -231$.

D. $u_{100} = -294$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	-1 	$+\infty$ 	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (β) đi qua trung điểm của BC và vuông góc với SC . Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (β) là

A. Hình thang cân.

B. Tam giác vuông.

C. Tam giác đều.

D. Tam giác cân.

Câu 15. Cho hình chóp có 20 cạnh. Tính số mặt của hình chóp đó.

A. 20.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Câu 16. Chiều cao h của hình trụ có diện tích toàn phần bằng $12\pi a^2$ và bán kính đáy $r = 2a$ là

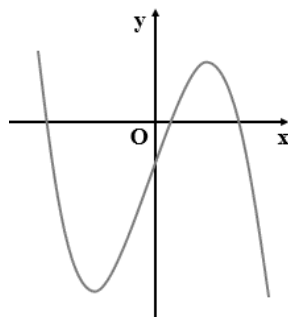
A. $2a$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $3a$.

D. a .

Câu 17. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

D. $a < 0, d < 0$.

Câu 18. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2 - C_n^2 - C_n^1 = 4n + 6$. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ là

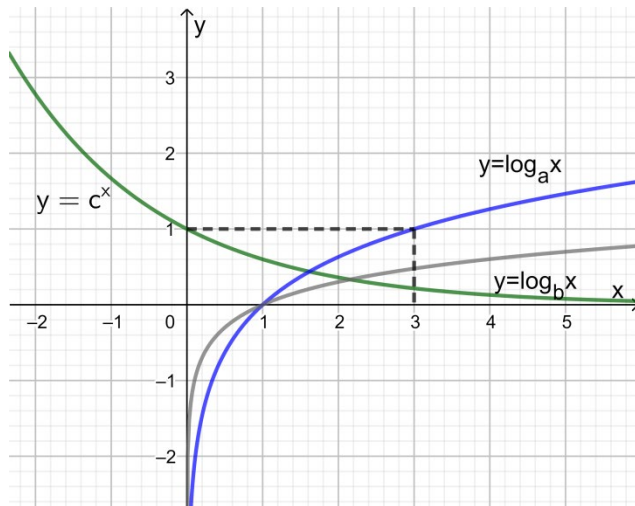
A. 7920.

B. -7920.

C. 126720.

D. -126720.

Câu 19. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $a < b < c$. B. $c < b < a$. C. $c < a < b$. D. $b < a < c$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 12$ và $f(4) = 7$. Khi đó $\int_1^4 f'(x) dx$ bằng

A. 9. B. -5. C. 5. D. 19.

Câu 21. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x - 1} = -2$. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{f(x) + 1}}{\sqrt{x} - 1}$.

A. $-\frac{4}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. -4. D. -2.

Câu 22. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 5a + 3b$. B. $x = a^5 + b^3$. C. $x = a^5 b^3$. D. $x = 3a + 5b$.

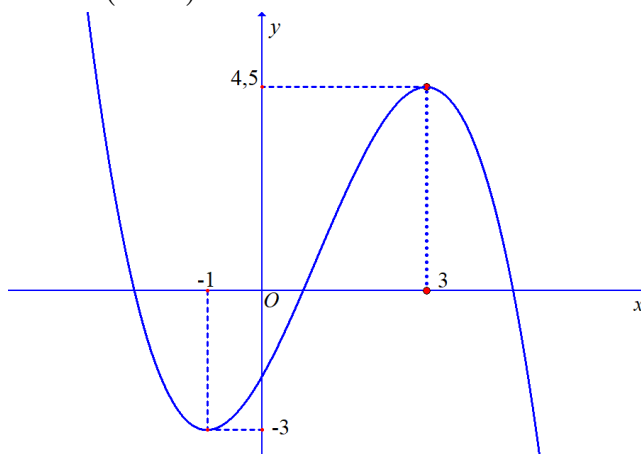
Câu 23. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6(2x - 1)^2 + 6 \sin 2x$ là

A. $(2x - 1)^3 + 3 \cos 2x + 2022$. B. $2(2x - 1)^3 - 6 \cos 2x + 2022$.
C. $(2x - 1)^3 - 3 \cos 2x + 2022$. D. $2(2x - 1)^3 - 3 \cos 2x + 2022$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x + 1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022)$.

A. $S = \frac{4044 - \sqrt{4044}}{4045}$. B. $S = \frac{2022 - \sqrt{2022}}{2023}$.
C. $S = \frac{4045 - \sqrt{4045}}{4045}$. D. $S = \frac{\sqrt{2022}}{\sqrt{2023}}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



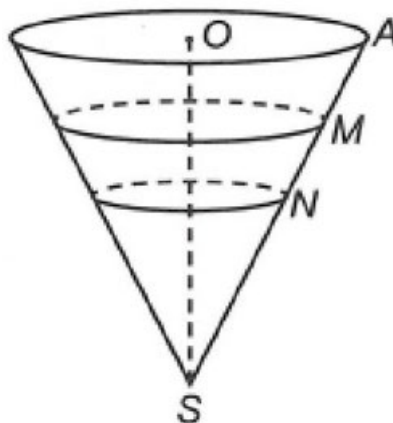
Phương trình $|f(x - 2)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 5)$?

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 26. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Biết $A'B$ vuông góc đáy. Đường thẳng AA' tạo với đáy một góc bằng 45° . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 30° . Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt bằng 5 và 8. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC' và H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC' . Thể tích lăng trụ $AHK.A'H'K'$ bằng

- A. $V = 100$. B. $V = 100\sqrt{2}$. C. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{200\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Một bể nước lớn của một khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27(m)$. Có một lần lúc bể nước chứa đầy, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh S . Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm $N \in SA$ thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết lượng nước mỗi lần thoát là bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN .



- A. $27(\sqrt[3]{2}-1)(m)$. B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4}-1)(m)$. C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)(m)$. D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)(m)$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2022; 2022)$ để phương trình $9^x - 2(m-1)3^x + m^2 - 3m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 2$

- A. 2016 B. 2017 C. 2021 D. 2022

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = 2BC$, đường trung tuyến BM , đường phân giác trong CN và $MN = a$. Các mặt phẳng (SBM) và (SCN) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và IB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{3a}{8}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2e^x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ x \cdot \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết rằng:

$\int_0^{\ln 2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \ln^a 2 + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$. Trong đó a, b, c là những số nguyên. Khi đó $S = a + 3b - c$ bằng:

- A. 5. B. 6. C. $e + 1$. D. 1.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx - 3m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 32. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối tứ diện $A.A'B'C'$.

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	4	-3	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ là

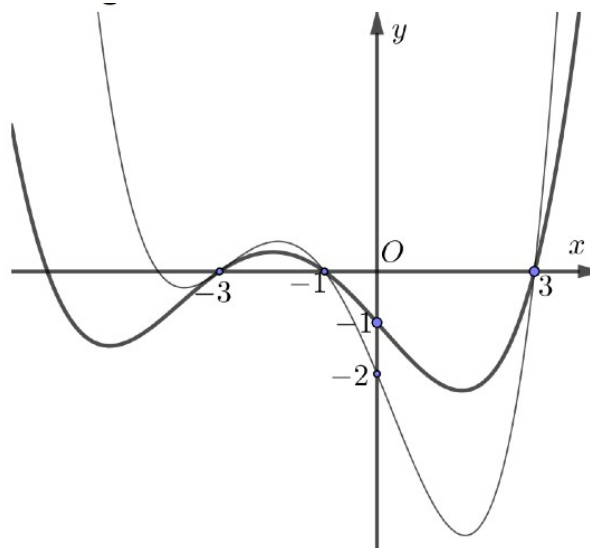
- A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 34. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa $\log_2(abc) = 1 + \frac{8}{c} - 4ab$. Khi ấy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{2} \log_{2a^2} 2 + \frac{1}{3} \log_{2b^3} 2 + \frac{1}{6} \log_{2c^6} 2$$
 bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\sqrt[3]{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 35. Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. B. $-\sqrt{3}$. C. $\frac{10-9\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

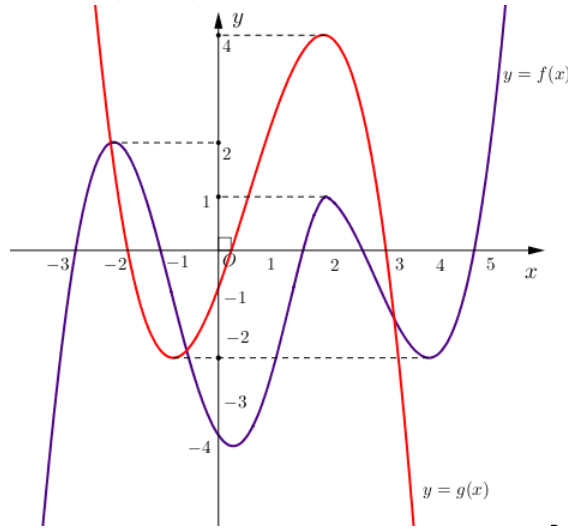
Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $[-2022; 2022]$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 4049. B. 2024. C. 2048. D. 4012.

Câu 38. Hai quả bóng giống nhau có cùng bán kính là $\sqrt{15}$ và hai quả bóng giống nhau có bán kính nhỏ hơn được đặt sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với các quả bóng khác (4 quả bóng đều nằm trên một mặt phẳng). Tính diện tích bề mặt của quả bóng có bán kính nhỏ hơn.

- A. $60\pi(7-4\sqrt{3})$. B. $60\pi(7+4\sqrt{3})$. C. 60π . D. 15π .

Câu 39. Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là



- A. 25. B. 22. C. 21. D. 26.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H) . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 41. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chia hết cho 6.

- A. $\frac{13}{60}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{17}{45}$. D. $\frac{11}{45}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB = a\sqrt{6}, AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB = a\sqrt{6}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Tính sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

- A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{11}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2mx+2m+3}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 2022. C. 4044. D. 2024.

Câu 44. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để phương trình sau có nghiệm

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

- A. 12. B. 23. C. 25. D. 10.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) - 3f(1-x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a}{b}$, (với a, b là các số nguyên

dương, và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

- A. $T = -7$. B. $T = 7$. C. $T = 0$. D. $T = 1$.

Câu 46. Phương trình $\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2022\pi)$?

- A. 10110. B. 4044. C. 2022. D. 6066.

- Câu 47.** Bác Hoa đem gửi tiết kiệm số tiền 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Bác gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $1,1\%/1$ quý. Số tiền còn lại bác gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $x\%/1$ tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được gộp vào gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Tính x (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy), biết rằng sau một năm, số tiền gốc và lãi bác Hoa thu được là 425.250.000 đồng.
A. 0,79. **B.** 0,75. **C.** 0,98. **D.** 0,85.
- Câu 48.** Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 \leq x, y \leq 2022$ và $(xy + 2x + 3y + 6) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 4y - xy - 8) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right)$
A. 6054. **B.** 3. **C.** 4036. **D.** 2020.
- Câu 49.** Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, $BC = 4a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 30° . Thể tích khối trụ bằng.
A. $12\pi a^3$. **B.** $16\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $16\pi a^3$. **D.** $12\sqrt{3}\pi a^3$.
- Câu 50.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng
A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

----- Hết -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	D	D	D	B	C	B	D	A	D	B	B	C	B	D	D	C	C	B	A	C	C	C	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	C	B	C	B	C	C	A	A	D	C	B	A	C	C	A	C	A	B	B	A	B	C	A	A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A.** $m > e$. **B.** $0 < m \leq 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = Ae^{2x - x^2}. \text{ Mà } f(0) = 1 \text{ suy ra } f(x) = e^{2x - x^2}.$$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$. Suy ra $0 < e^{2x - x^2} \leq e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

- Câu 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$.

- A.** $(-\infty; -2)$. **B.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2} - x > 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2} - x > 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x - 2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } D = (-\infty; -2] \cup (2; +\infty).$$

- Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để hàm số $y = f(x) = (x + 1) \ln x + (2 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(0; e^2)$.

- A.** 2029. **B.** 2022. **C.** 2025. **D.** 2027.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} + 2 - m$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} + 3 \geq m; \forall x \in (0; e^2).$$

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 3 \text{ với } x \in (0; e^2).$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	e^2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$		

$\swarrow$ 4 $\searrow$ $5 + \frac{1}{e^2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x) \geq 4$ với mọi $x \in (0; e^2)$.

Từ đó suy ra $-2022 \leq m \leq 4$.

Vậy có 2027 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)(x - 3)$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = x^2(x-2)^2(x-1)(x-3)(x+2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

$\swarrow$ $\nearrow$ $\swarrow$ $\nearrow$

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{1}{3}a^3$.

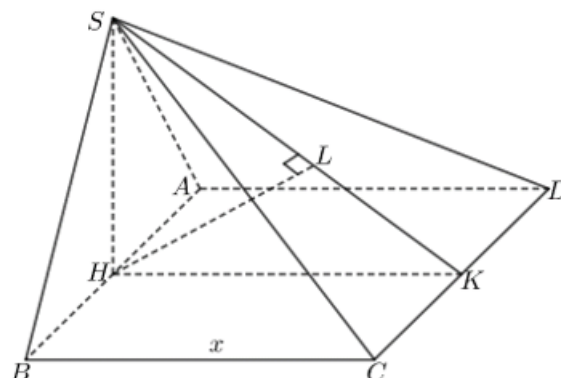
B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{2}{3}a^3$.

D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$. Ta có

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2}x, V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^3.$$

Kẻ $HK \perp CD, K \in CD$

Kẻ $HL \perp SK, L \in SK$

Suy ra $HL \perp (SCD)$ và

$$d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$$

$$= HL = \frac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}x$$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \frac{\sqrt{21} \cdot x}{7} = \frac{3\sqrt{7} \cdot a}{7} \Rightarrow x = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3} \cdot x^3}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot (a\sqrt{3})^3}{6} = \frac{3}{2}a^3.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

A. 7.

B. $\frac{197}{6}$.

C. $\frac{29}{2}$.

D. $\frac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } \int f'(x) dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt.$$

$$\text{Khi đó, } \int f'(x) dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2-1}{t^2-t} \cdot 2t dt = \int \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot (t-1)} \cdot 2t dt = \int (2t+2) dt$$

$$= t^2 + 2t + C = (x+1) + 2\sqrt{x+1} + C.$$

$$\text{Mà } f(3) = 3 \Leftrightarrow (3+1) + 2\sqrt{3+1} + C = 3 \Leftrightarrow C = -5.$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1) + 2\sqrt{x+1} - 5 = x + 2\sqrt{x+1} - 4.$$

$$\Rightarrow \int_3^8 f(x) dx = \int_3^8 (x + 2\sqrt{x+1} - 4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 4x \right) \Big|_3^8 = 36 - \frac{19}{6} = \frac{197}{6}.$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

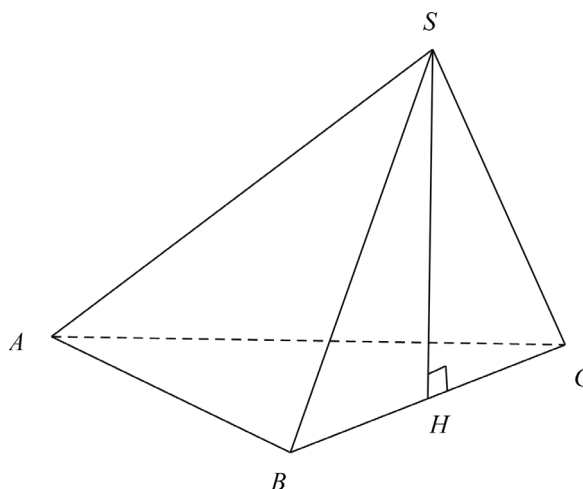
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH = a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a$.

Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 8. Cho mặt cầu có diện tích bằng 72π (cm²). Bán kính R của khối cầu bằng:

- A.** $R = \sqrt{6}$ (cm). **B.** $R = 3\sqrt{2}$ (cm). **C.** $R = 6$ (cm). **D.** $R = 3$ (cm).

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức diện tích mặt cầu ta có: $S = 4\pi R^2$.

Suy ra $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \sqrt{\frac{72\pi}{4\pi}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm).

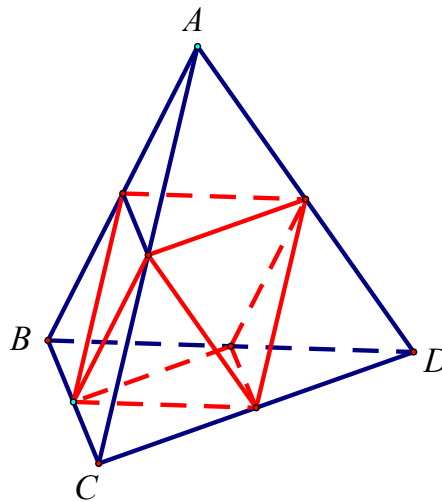
Câu 9. Cho hình hình đa diện đều loại $\{3;3\}$ có cạnh bằng a . Gọi S là diện tích tất cả các mặt của hình đa diện (H) có đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình đa diện trên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = 2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cho hình hình đa diện đều loại $\{3;3\}$ cạnh a là tứ diện đều cạnh a .



Khi đó (H) là bát diện đều cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Ta có (H) có 8 mặt, mỗi mặt là tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$.

$$\Rightarrow S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là

- A.** $4\sqrt{2} - 1$ và 7. **B.** 2 và 4. **C.** $4\sqrt{2}$ và 8. **D.** $\sqrt{2}$ và 2.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \leq \sin x + 3 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\sin x + 3} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 1 \leq y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1 \leq 4 \cdot 2 - 1 = 7 \end{aligned}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 11. Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 HS nam và 4 HS nữ vào một dãy ghế sao cho: HS nam ngồi kề nhau, HS nữ ngồi kề nhau?

A. 362880.

B. 48.

C. 17280.

D. 34560.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp HS nam trong nhóm nam là $6!$ cách

Số cách xếp HS nữ trong nhóm nữ là $4!$ cách

Số cách xếp 2 nhóm nam và nữ là $2!$ cách

Số cách sắp xếp 6 HS nam và 4 HS nữ vào một dãy ghế sao cho: HS nam ngồi kề nhau, HS nữ ngồi kề nhau là: $2! \cdot 4! \cdot 6! = 34560$ cách.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 100 của cấp số.

A. $u_{100} = -243$.

B. $u_{100} = -295$.

C. $u_{100} = -231$.

D. $u_{100} = -294$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - u_1 - d = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}$$

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = 2 + 99(-3) = -295$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -1	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT, ta có:

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = a = -1 < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -c = 1 \Rightarrow c = -1 < 0$.

Lại có $y' < 0 \Leftrightarrow ac - b < 0 \Leftrightarrow b > ac \Rightarrow b > (-1) \cdot (-1) = 1 > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0 \rightarrow$ chọn B.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt phẳng (β) đi qua trung điểm của BC và vuông góc với SC .

Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (β) là

A. Hình thang cân.

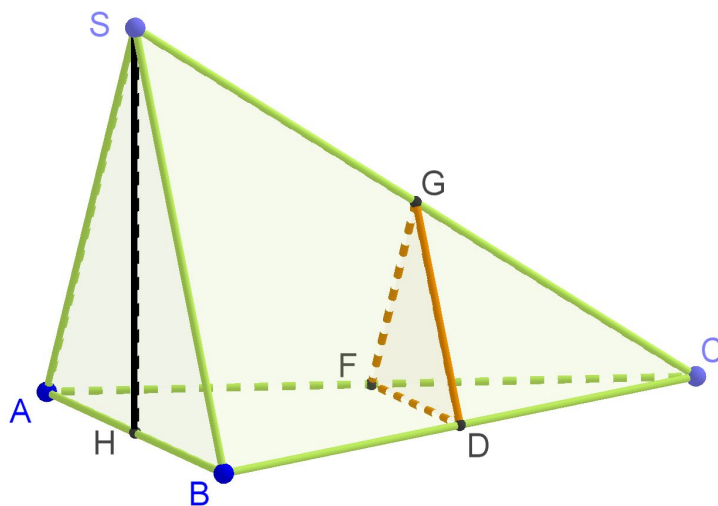
B. Tam giác vuông.

C. Tam giác đều.

D. Tam giác cân.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm của BC và H là trung điểm của AB

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ SH \perp AB \end{cases}$$

$$* \text{ Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

* Gọi F, G lần lượt là trung điểm của AC và SC

$$\text{Khi đó, ta có: } \begin{cases} BC \perp (SAB) \\ (SAB) // (DFG) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DFG)$$

Vậy thiết diện chính là tam giác DFG

* Xét $\triangle SAB \sim \triangle GFD$

Mà $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow \triangle GFD$ đều

Hay thiết diện là tam giác đều

Câu 15. Cho hình chóp có 20 cạnh. Tính số mặt của hình chóp đó.

A. 20 .

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Số cạnh bên của hình chóp bằng số cạnh đáy.

Suy ra số cạnh bên của hình chóp là: $\frac{20}{2} = 10$ cạnh.

Vậy hình chóp có 10 mặt bên và 1 mặt đáy.

Câu 16. Chiều cao h của hình trụ có diện tích toàn phần bằng $12\pi a^2$ và bán kính đáy $r = 2a$ là

A. $2a$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $3a$.

D. a .

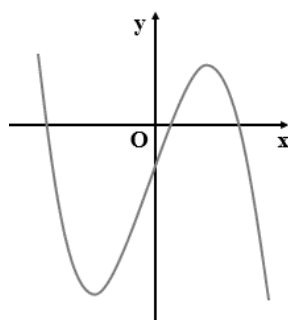
Lời giải

Chọn D

Diện tích toàn phần hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Leftrightarrow 12a^2\pi = 2\pi \cdot 2a \cdot h + 2\pi \cdot (2a)^2 \Leftrightarrow 4\pi ah = 4a^2\pi \Leftrightarrow h = a.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

D. $a < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x = 0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$.

Câu 18. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2 - C_n^2 - C_n^1 = 4n + 6$. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$

là

A. 7920.

B. -7920.

C. 126720.

D. -126720.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A_n^2 - C_n^2 - C_n^1 = 4n + 6 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} - n = 4n + 6$$

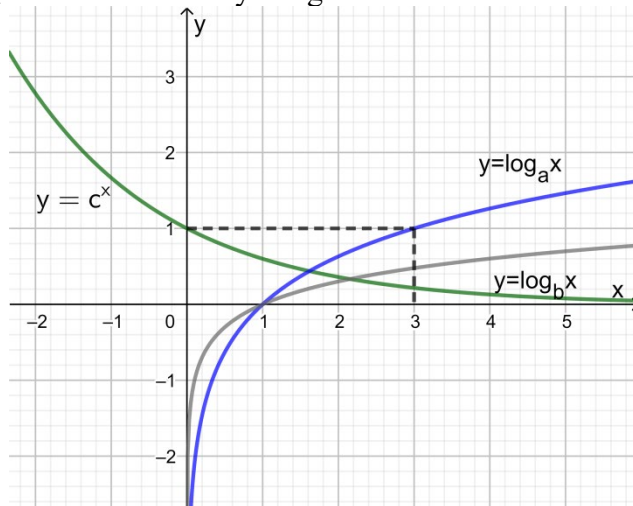
$$\Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -1(l) \end{cases} \Leftrightarrow n = 12.$$

$$\text{Với } n = 12, \text{ ta có khai triển } \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k 2^k C_{12}^k x^{12 - \frac{3k}{2}}.$$

$$\text{Để số hạng không chứa } x \text{ thì } 12 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 8.$$

$$\text{Vậy số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển } \left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n \text{ là } (-1)^8 2^8 C_{12}^8 = 126720.$$

Câu 19. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < b < c$.

B. $c < b < a$.

C. $c < a < b$.

D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số mũ ta có $c < 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số logarit ta có $b > a > 1$.

Với $x = 3$ thì $\log_a 3 = 1 \Leftrightarrow a = 3$ và $0 < \log_b 3 < 1 \Leftrightarrow b > 3$.

Ta có $c < 1 < a < b$ nên loại các phương án A, B, D.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 12$ và $f(4) = 7$. Khi đó $\int_1^4 f'(x) dx$ bằng

A. 9.

B. -5.

C. 5.
Lời giải

D. 19.

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^4 = f(4) - f(1) = 7 - 12 = -5.$$

Câu 21. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = -2$. Tính $P = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{f(x)+1}}{\sqrt{x}-1}$.

A. $-\frac{4}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. -4.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = -2 \Rightarrow f(x)+1 = (x-1)h(x) \Rightarrow f(1) = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } P &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{f(x)+1}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)+1](\sqrt{x}+1)}{(x-1)[\sqrt[3]{f^2(x)} - \sqrt[3]{f(x)+1}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)+1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{f^2(x)} - \sqrt[3]{f(x)+1}} \right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{(-1)^2} - \sqrt[3]{-1}+1} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Câu 22. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 5a + 3b$.

B. $x = a^5 + b^3$.

C. $x = a^5 b^3$.

D. $x = 3a + 5b$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5 b^3 \Leftrightarrow x = a^5 b^3.$$

Câu 23. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6(2x-1)^2 + 6 \sin 2x$ là

A. $(2x-1)^3 + 3 \cos 2x + 2022$.

B. $2(2x-1)^3 - 6 \cos 2x + 2022$.

C. $(2x-1)^3 - 3 \cos 2x + 2022$.

D. $2(2x-1)^3 - 3 \cos 2x + 2022$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (6(2x-1)^2 + 6 \sin 2x) dx = (2x-1)^3 - 3 \cos 2x + C, \text{ với } C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 6(2x-1)^2 + 6 \sin 2x \text{ là } (2x-1)^3 - 3 \cos 2x + 2022.$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2022)$.

A. $S = \frac{4044 - \sqrt{4044}}{4045}$.

B. $S = \frac{2022 - \sqrt{2022}}{2023}$.

C. $S = \frac{4045 - \sqrt{4045}}{4045}$.

D. $S = \frac{\sqrt{2022}}{\sqrt{2023}}$.

Lời giải

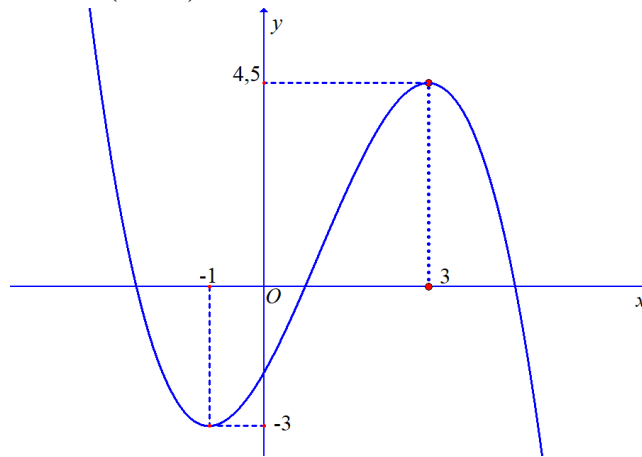
Chọn C

$$\text{Tập xác định của hàm số là } D = \left(\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = (\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1})' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \forall x \in D$$

$$\text{Vậy ta có } S = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{4043}} - \frac{1}{\sqrt{4045}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4045}} = \frac{4045 - \sqrt{4045}}{4045}.$$

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $|f(x-2)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 5)$?

A. 5.

B. 4.

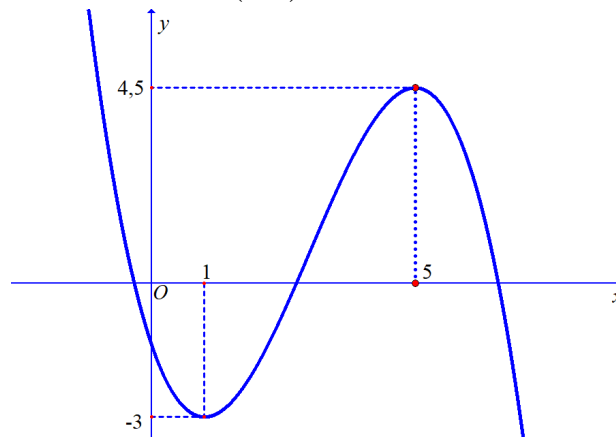
C. 2.

D. 3.

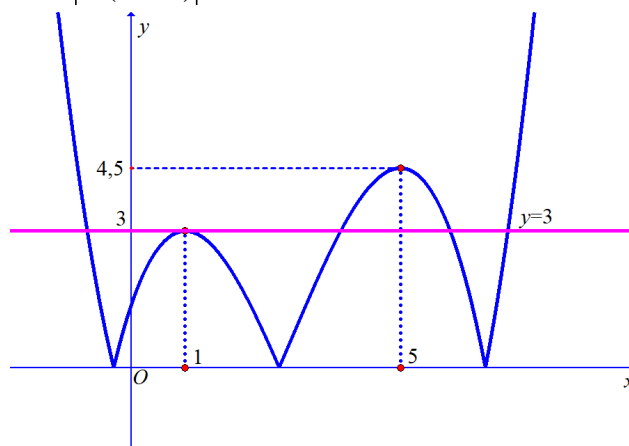
Lời giải

Chọn C

Tính tiến đồ thị hàm số đã cho theo véc tơ $\vec{u}(2; 0)$ ta thu được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$ như sau



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x-2)|$



Suy ra phương trình $|f(x-2)| = 3$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 5)$.

Câu 26. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Biết $A'B$ vuông góc đáy. Đường thẳng AA' tạo với đáy một góc bằng 45° . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 30° . Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt bằng 5 và 8. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC' và H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC' . Thể tích lăng trụ $AHK.A'H'K'$ bằng

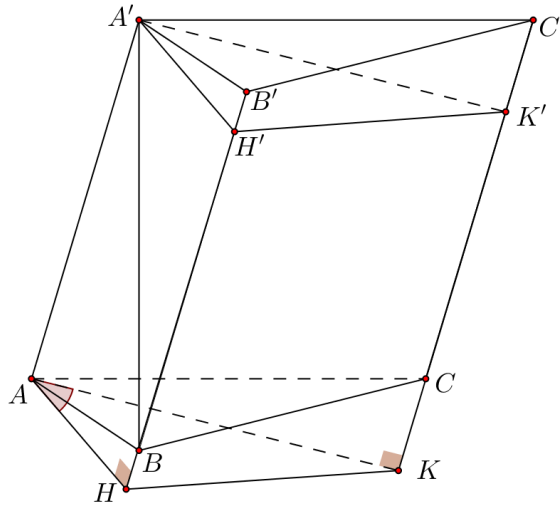
A. $V = 100$.

B. $V = 100\sqrt{2}$.

C. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$.

D. $V = \frac{200\sqrt{3}}{3}$.

Chọn A



Từ đỉnh A kẻ $AH \perp BB'$ ($H \in BB'$). Cũng từ A kẻ $AK \perp CC'$ ($K \in CC'$).

Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 30° .

Suy ra, trong tam giác HAK , có $\widehat{HAK} = 30^\circ$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2} AH \cdot AK \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Góc giữa đường thẳng $A'A$ và (ABC) bằng góc giữa $A'A$ và AB nên $(A'A, AB) = \widehat{A'AB} = 45^\circ$. Mà $\widehat{A'AB} = 45^\circ = \widehat{ABH}$.

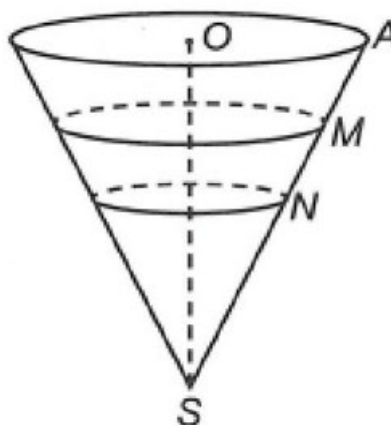
$$\text{Xét tam giác } \Delta HAB \text{ vuông tại } H \text{ suy ra } AB = \frac{AH}{\sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } \Delta BAA' \text{ vuông tại } B \text{ suy ra } AA' = \frac{AB}{\cos 45^\circ} = 10.$$

Mà AA' là đường cao của lăng trụ $AHK.A'H'K'$.

$$\text{Nên thể tích } V_{AHK.A'H'K'} = A'A \cdot S_{\Delta AHK} = 10 \cdot 10 = 100.$$

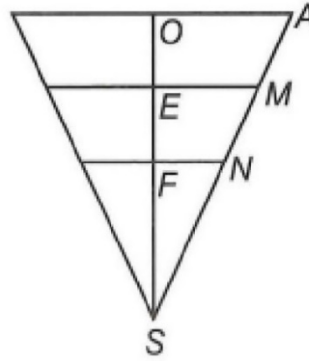
Câu 27. Một bể nước lớn của một khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27(m)$. Có một lần lúc bể nước chứa đầy, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh S . Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm $N \in SA$ thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết lượng nước mỗi lần thoát là bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN .



- A. $27(\sqrt[3]{2}-1)(m)$. B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4}-1)(m)$. C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)(m)$. D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)(m)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi V_1, V_2, V lần lượt là thể tích khối nón có đường sinh là SN, SM, SA

$$\text{Do } \triangle SEM \sim \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SE}{SO} = \frac{EM}{OA}$$

$$\text{Lại có } \frac{V_2}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi EM^2 SE}{\frac{1}{3}\pi OA^2 SA} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{SA}{SM}\right)^3 \Leftrightarrow SM = \sqrt[3]{13122}$$

$$\text{Tương tự } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{SN}{SA}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{SN}{27}\right)^3 \Leftrightarrow SN = \sqrt[3]{6561}$$

$$\text{Vậy } MN = SM - SN = \sqrt[3]{13122} - \sqrt[3]{6561} = 9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1).$$

- Câu 28.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2022; 2022)$ để phương trình $9^x - 2.(m-1)3^x + m^2 - 3m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 2$

A. 2016

B. 2017

C. 2021

D. 2022

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 9^x - 2.(m-1)3^x + m^2 - 3m + 5 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2.(m-1).3^x + m^2 - 3m + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0, \text{ khi đó phương trình trở thành } t^2 - 2.(m-1).t + m^2 - 3m + 5 = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ m-1 > 0 \\ m^2 - 3m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

$$\text{Khi đó } t_1 = 3^{x_1}, t_2 = 3^{x_2}. \text{ Do } x_1 + x_2 > 2 \Rightarrow 3^{x_1+x_2} > 9 \Leftrightarrow t_1.t_2 > 9$$

$$\text{Áp dụng định lý Vi - et ta được } m^2 - 3m + 5 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases}$$

Vậy $m > 4 \Rightarrow m \in (4; 2022)$ từ đó suy ra có 2017 giá trị nguyên của m thỏa mãn

- Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = 2BC$, đường trung tuyến BM , đường phân giác trong CN và $MN = a$. Các mặt phẳng (SBM) và (SCN) cùng vuông góc với mặt

phẳng (ABC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách

giữa hai đường thẳng MN và IB bằng

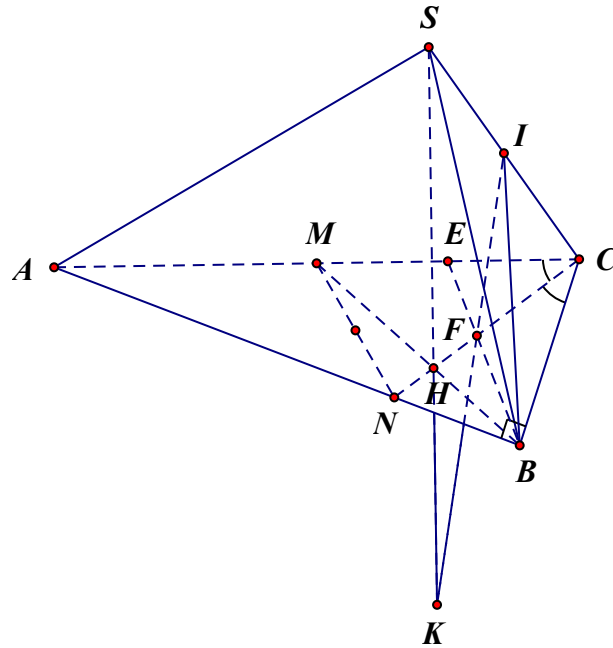
A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{3a}{8}$.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của CN và BM . Ta có $SH \perp (ABC)$.

Đặt $BC = x$ (với $x > 0$).

Ta có $CB = CM = BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow \triangle BCM$ đều.

Xét $\triangle BCM$ đều có đường phân giác CH cũng là đường cao nên $CH \perp BM$

$\Rightarrow CN \perp BM$ tại $H \Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{MCN} = 90^\circ$ (1)

Có $\widehat{BNC} + \widehat{NCB} = 90^\circ$ (2)

Mà $\widehat{MCN} = \widehat{NCB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BNC} \Rightarrow$ tứ giác $BCMN$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{CMN} = 90^\circ$, hay $MN \perp CA$.

Suy ra hai tam giác MNA và BCA đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{\sqrt{3}x} \Rightarrow x = a\sqrt{3}; AC = 2a\sqrt{3}.$$

Lấy E là trung điểm của CM .

Ta có $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel (BEI)$.

$\Rightarrow d(MN, BI) = d(MN, (BEI)) = d(M, (BEI)) = 2d(H, (BEI))$.

Nên $SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4}a$.

$$\text{Ta có } HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HC = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}HC = \frac{a}{2}.$$

Đặt $y = d(H, (BEI))$.

Xét tam diện vuông đỉnh H với ba cạnh HB , HC , HS ta có mặt phẳng (IEB) cắt HB tại B ; cắt HC tại F và cắt HS tại K , ta có

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow y = \frac{3}{8}a.$$

Do đó $d(MN, BI) = 2 \cdot \frac{3}{8}a = \frac{3a}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2e^x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ x \cdot \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết rằng:

$\int_0^{\ln 2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \ln^a 2 + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$. Trong đó a, b, c là những số nguyên. Khi đó $S = a + 3b - c$ bằng:

A. 5.

B. 6.

C. $e + 1$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^{\ln 2} f(x) \cdot dx = \int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} x dx + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1} dx = \frac{\ln^2 2}{2} + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1} dx.$$

Đặt $t = 2e^x + 1 \Rightarrow dt = 2e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1}$. Đổi cận: $x = \ln 2 \Rightarrow t = 5, x = 0 \Rightarrow t = 3$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1} dx = \int_3^5 \frac{dt}{t(t-1)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left(\ln|t-1| - \ln|t| \right) \Big|_3^5 = \ln 4 - \ln 5 - \ln 2 + \ln 3 = \ln 2 - \ln \frac{5}{3}.$$

$$\int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln^2 2 + \ln 2 - \ln \frac{5}{3} \Rightarrow a = 2, b = 1, c = -1$$

Vậy $a + 3b - c = 6$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx - 3m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 = mx - 3m \Leftrightarrow x^2(x-3) = m(x-3) \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 = m(*) \end{cases}.$$

Để đường thẳng $(d): y = mx - 3m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ thì $x^2 = m > 0; m \neq 9$.

Từ (*) ta có: $x = \pm\sqrt{m}$ nên $3^2 + (-\sqrt{m})^2 + (\sqrt{m})^2 = 15 \Leftrightarrow 2m = 6 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 32. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối tứ diện $AA'B'C'$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \\ f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \frac{x^2+1}{x} = a, a < -2 \\ \frac{x^2+1}{x} = b, -2 < b < 2 \\ \frac{x^2+1}{x} = c, c > 2 \end{cases}$$

• $x^2-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

• Xét hàm số $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow -2 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- $h(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt, với $a < -2$
- $h(x) = b$ vô nghiệm, với $-2 < b < 2$
- $h(x) = c$ có 2 nghiệm phân biệt, với $c > 2$

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 34. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa $\log_2(abc) = 1 + \frac{8}{c} - 4ab$. Khi ấy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{2} \log_{2a^2} 2 + \frac{1}{3} \log_{2b^3} 2 + \frac{1}{6} \log_{2c^6} 2 \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\sqrt[6]{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2(abc) = 1 + \frac{8}{c} - 4ab \Leftrightarrow \log_2(4ab) + (4ab) = \log_2\left(\frac{8}{c}\right) + \left(\frac{8}{c}\right).$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f(4ab) = f\left(\frac{8}{c}\right) \Leftrightarrow 4ab = \frac{8}{c} \Leftrightarrow abc = 2 \Rightarrow \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = 1.$$

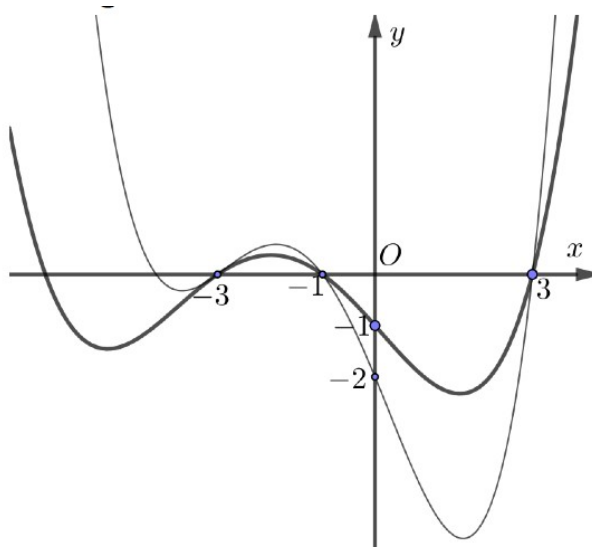
Đặt $x = \log_2 a; y = \log_2 b; z = \log_2 c \Rightarrow x + y + z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \frac{1}{2} \log_{2a^2} 2 + \frac{1}{3} \log_{2b^3} 2 + \frac{1}{6} \log_{2c^6} 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 2a^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_2 2b^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log_2 2c^6} \\ &= \frac{1}{2+4\log_2 a} + \frac{1}{3+9\log_2 b} + \frac{1}{6+36\log_2 c} = \frac{1}{2+4x} + \frac{1}{3+9y} + \frac{1}{6+36z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2+4x} + \frac{2+4x}{16} \right) + \left(\frac{1}{3+9y} + \frac{3+9y}{36} \right) + \left(\frac{1}{6+36z} + \frac{6+36z}{144} \right) - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{2+4x} \cdot \frac{2+4x}{16}} + 2\sqrt{\frac{1}{3+9y} \cdot \frac{3+9y}{36}} + 2\sqrt{\frac{1}{6+36z} \cdot \frac{6+36z}{144}} - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) = \frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $T_{\min} = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{6} \Rightarrow (a; b; c) = (\sqrt{2}; \sqrt[3]{2}; \sqrt[6]{2})$.

Câu 35. Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. B. $-\sqrt{3}$. C. $\frac{10-9\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $h(x) = f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Do $h(0) = f(0) - g(0) = -1 - (-2) = 1 \Leftrightarrow a \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{27}$.

Suy ra $h(x) = -\frac{1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Ta có $h'(x) = -\frac{2}{27}(x+3)(x+1)(x-3) - \frac{1}{27}(x+3)^2(x-3) - \frac{1}{27}(x+3)^2(x+1)$.

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{27}(x+3)(x+1)(x-3) - \frac{1}{27}(x+3)^2(x-3) - \frac{1}{27}(x+3)^2(x+1) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-3; 3] \\ x = -\sqrt{3} \in [-3; 3] \\ x = \sqrt{3} \in [-3; 3] \end{cases}
\end{aligned}$$

Mà $h(-3) = 0, h(-\sqrt{3}) = \frac{12-8\sqrt{3}}{9}, h(\sqrt{3}) = \frac{12+8\sqrt{3}}{9}$.

Vậy $\min_{[-3;3]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = \frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục Ox .

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$$

Vì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Ta có $y = \frac{1}{3}(x - m) \cdot y' - 2x - m$.

Giá trị của hàm số lần lượt tại hai điểm cực trị $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$ là:

$$y_1 = -3m + 2, y_2 = -3m - 2.$$

Suy ra yêu cầu bài toán tương đương với điều kiện

$$y_1 \cdot y_2 < 0 \Leftrightarrow (-3m + 2)(-3m - 2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 0$.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $[-2022; 2022]$ sao cho hàm số

$$y = |-2x^3 + 3mx - 2| \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)?$$

A. 4049.

B. 2024.

C. 2048.

D. 4012.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $f(x) = -2x^3 + 3mx - 2$

Ta có: $f'(x) = -6x^2 + 3m$

Nếu $m \leq 0$: $f'(x) \leq 0, \forall x \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{4}{3} \Rightarrow m \leq 0$.

Nếu $m > 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m}{2}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{m}{2}}$	$\sqrt{\frac{m}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2$	$-\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên

$$(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} \geq 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right) \leq 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} < 1 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ 2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2 \leq 0 \\ m < 2 \\ m \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq \sqrt[3]{2} \\ m < 2 \\ m \leq \frac{4}{3} \end{cases} \stackrel{(l)}{\Rightarrow} 0 < m \leq \frac{4}{3}.$$

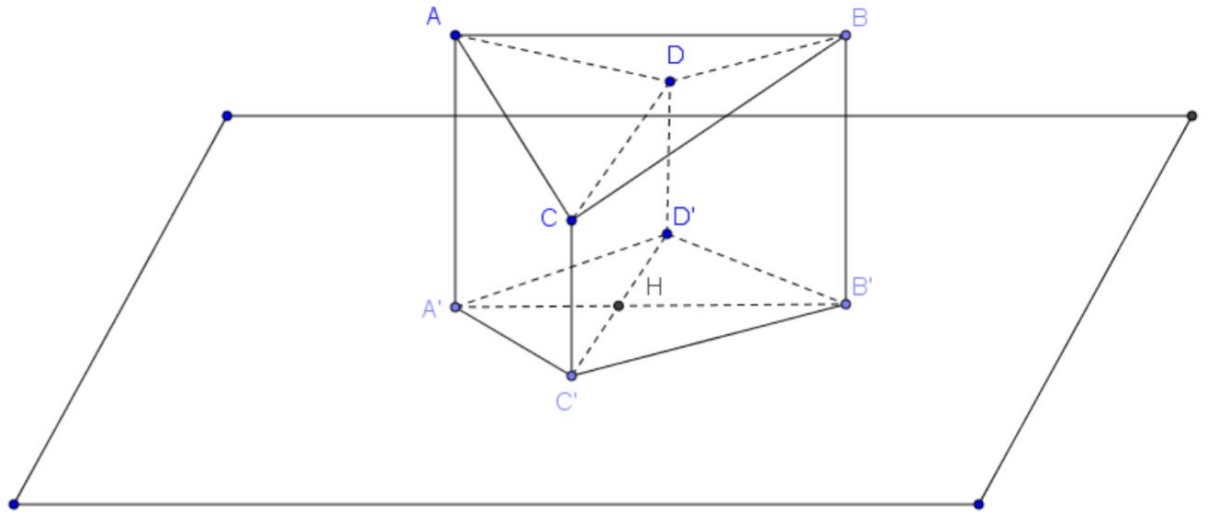
Vậy $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-2022; 2022] \Rightarrow m \in \{-2022; -2021; \dots; -1; 0; 1\}$. Có 2024 số.

Câu 38. Hai quả bóng giống nhau có cùng bán kính là $\sqrt{15}$ và hai quả bóng giống nhau có bán kính nhỏ hơn được đặt sao cho mỗi quả bóng đều tiếp xúc với các quả bóng khác (4 quả bóng đều nằm trên một mặt phẳng). Tính diện tích bề mặt của quả bóng có bán kính nhỏ hơn.

A. $60\pi(7 - 4\sqrt{3})$. **B.** $60\pi(7 + 4\sqrt{3})$. **C.** 60π . **D.** 15π .

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính quả bóng nhỏ.

Gọi A, B lần lượt là tâm của hai quả bóng lớn. C, D lần lượt là tâm của hai quả bóng nhỏ.

Gọi $A'; B'; C'; D'$ lần lượt là hình chiếu của $A; B; C; D$ lên mặt phẳng. Ta có $AA' = BB' = \sqrt{15}$, $CC' = DD' = r$.

Do mỗi quả bóng đều tiếp xúc với 3 quả còn lại nên ta có $AC = AD = BC = BD = r + \sqrt{15}$; $AB = 2\sqrt{15}$; $CD = 2r$. Gọi H là giao điểm của $A'B'$ và $C'D'$.

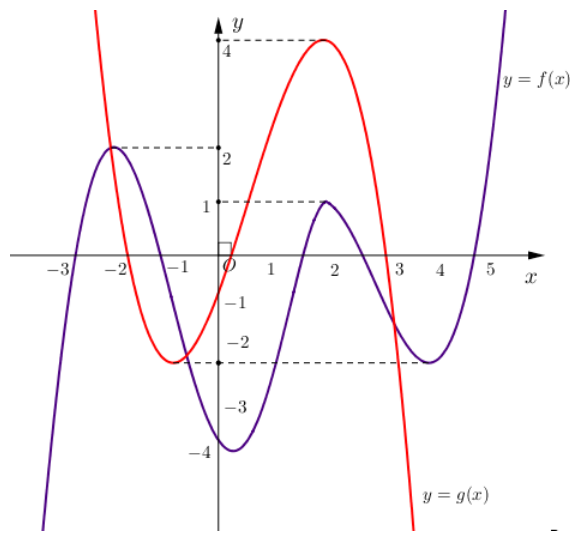
Ta thấy $A'B'C'D'$ là hình thoi nên $A'H = B'H = \frac{A'B'}{2} = \frac{AB}{2} = \sqrt{15}$; $C'H = D'H = \frac{C'D'}{2} = \frac{CD}{2} = r$.

Áp dụng định lý Pytago ta có $BC^2 = B'C'^2 + (BB' - CC')^2 = C'H^2 + B'H^2 + (BB' - CC')^2$.

Từ đó ta có $(r + \sqrt{15})^2 = r^2 + (\sqrt{15})^2 + (\sqrt{15} - r)^2 \Leftrightarrow r = (2 - \sqrt{3})\sqrt{15}$.

Vậy diện tích mặt của quả bóng có bán kính nhỏ hơn là $S = 4\pi r^2 = 60\pi(7 - 4\sqrt{3})$.

Câu 39. Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là



A. 25.

B. 22.

C. 21.

D. 26.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 & (1) \\ f(x) = \alpha, (\alpha \in (0;1)) & (2). \\ f(x) = 3 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm; phương trình (2) có 5 nghiệm và phương trình (3) có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm.

$$\text{Ta có } f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -3 & (4) \\ g(x) = -1 & (5) \\ g(x) = 1 & (6) \\ g(x) = a, (a \in (1;2)) & (7) \\ g(x) = b, (b \in (4;5)) & (8) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (4) có 1 nghiệm; phương trình (5); (6); (7) mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình (8) có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f(g(x)) = 0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 21.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H) . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{(2x-1)^2}.$$

Do tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{-3}{(2x_1-1)^2} = \frac{-3}{(2x_2-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 + x_2 = 1$.

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì

$$A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right).$$

Gọi $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta thấy $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 1 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } \overline{IA} = \left(\frac{a}{2}; \frac{3}{2a}\right) \Rightarrow IA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9}{4a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{9}{4a^2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Vì } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } AB = 2IA \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = \sqrt{6} \text{ khi } \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}.$$

Câu 41. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chia hết cho 6.

A. $\frac{13}{60}$.

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{17}{45}$.

D. $\frac{11}{45}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{abc}$ ($a \neq 0$)

Theo bài ra: Vì $\overline{abc}$ chia hết cho 6 nên $\overline{abc}$ phải là số chẵn.

Như vậy, c có 4 cách chọn.

Trường hợp 1: $c = 0$.

Khi đó, (a, b) là hoán vị của bộ số $(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 6), (4, 5)$.

Mỗi trường hợp có 2 cách sắp xếp.

Như vậy có $5 \cdot 2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 1.

Trường hợp 2: $c = 2$.

Khi đó, (a, b) là hoán vị của bộ số $(0, 1), (0, 4), (1, 3), (1, 6), (3, 4), (4, 6)$.

Mỗi trường hợp có chữ số 0 có 1 cách sắp xếp.

Mỗi trường hợp không có chữ số 0 có 2 cách sắp xếp.

Như vậy, có $2 + 4 \cdot 2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 2.

Trường hợp 3: $c = 4$.

Khi đó, (a, b) là hoán vị của bộ số $(0, 2), (0, 5), (2, 3), (2, 6), (3, 5), (5, 6)$.

Làm tương tự, có $2 + 4 \cdot 2 = 10$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán trong trường hợp 3.

Trường hợp 4: $c = 6$.

Khi đó, (a, b) là hoán vị của bộ số $(0, 3), (1, 2), (1, 5), (2, 4), (4, 5)$.

Làm tương tự, trường hợp này có $1 + 4 \cdot 2 = 9$ số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$.

Xác suất để chọn được số chia hết cho 6:

$$P = \frac{10 + 10 + 10 + 9}{180} = \frac{39}{180} = \frac{13}{60}.$$

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB = a\sqrt{6}, AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB = a\sqrt{6}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Tính sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

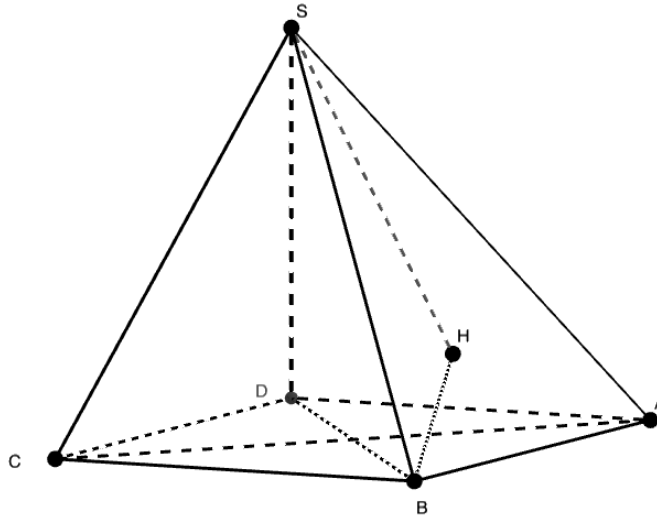
B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D.

Ta có $\begin{cases} BA \perp SD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD) \Rightarrow BA \perp AD$

$\begin{cases} BC \perp SD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCD) \Rightarrow BC \perp CD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (SAC) $\Rightarrow \widehat{[SB, (SAC)]} = \widehat{BSH}$

Ta có:

$$\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d(D; (SAC))}{SB}$$

Lại có: $\frac{1}{d^2(D; (SAC))} = \frac{1}{DS^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow d(D; (SAC)) = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$.

Suy ra: $\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d(D; (SAC))}{SB} = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2mx + 2m + 3}}$ có

hai đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 2022.

C. 4044.

D. 2024.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2mx + 2m + 3 > 0 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{S}{2} > 2 \\ a.f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m - 3 > 0 \\ \frac{2m}{2} > 2 \\ (2)^2 - 2m \cdot (2) + 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \\ m > 2 \\ -2m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < \frac{7}{2}.$$

Mặt khác $-2022 \leq m \leq 2022$ và $m \in \mathbb{Z}$.

Do đó $m \in \emptyset$. Vậy không có số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 44. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để phương trình sau có nghiệm

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

A. 12.

B. 23.

C. 25.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương với:

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 2m + 2x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)^2 + 2m - 4\right) = (2m - 9)x + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{16}{\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)^2} + 2m - 4\right) = (1 - 2m)\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right) - 8x$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4} - x$, ta thấy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} - x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} - x = +\infty \Rightarrow t \in (0; +\infty) \Rightarrow 2x = \frac{4 - t^2}{t}$$

$$\text{Phương trình trở thành } \log_2\left(\frac{16 + (2m - 4)t^2}{t^2}\right) = (1 - 2m)t - \frac{4(4 - t^2)}{t}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(16 + (2m - 4)t^2) + \frac{16 + (2m - 4)t^2}{t} = \log_2(t^2) + \frac{t^2}{t}$$

Xét hàm đặc trưng $y = f(u) = \log_2 u + \frac{u}{t}$ có $f'(u) = \frac{1}{u \ln 2} + \frac{1}{t} > 0$ (xem như t là tham số)

Suy ra $f(u)$ luôn đồng biến

$$\Leftrightarrow f(16 + (2m - 4)t^2) = f(t^2) \Leftrightarrow 16 + (2m - 4)t^2 = t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{16}{5 - 2m}$$

$$\text{Do } t \in (0; +\infty) \text{ nên suy ra } t^2 = \frac{16}{5 - 2m} > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-20; 20]} -20 \leq m \leq 2$$

Như vậy ta kết luận có tất cả 23 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$2f(x) - 3f(1 - x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết rằng tích phân } I = \int_0^1 x.f'(x).dx = \frac{a}{b}, \text{ (với } a, b \text{ là các số nguyên}$$

duy, và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

A. $T = -7$.

B. $T = 7$.

C. $T = 0$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) \cdot dx = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot dx = f(1) - \int_0^1 f(x) \cdot dx$$

$$+ \text{ Từ điều kiện } 2f(x) - 3f(1-x) = 4x-1, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow 2f(0) - 3f(1) = -1$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow 2f(1) - 3f(0) = 3$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} f(0) = \frac{-7}{5} \\ f(1) = \frac{-3}{5}, (1) \end{cases}$$

$$+ \text{ Ta có: } \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 f(1-x) \cdot dx.$$

$$2f(x) - 3f(1-x) = 4x-1 \Rightarrow \int_0^1 [2f(x) - 3f(1-x)] \cdot dx = \int_0^1 (4x-1) \cdot dx \Leftrightarrow -\int_0^1 f(x) \cdot dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) \cdot dx = -1, (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } I = \frac{-3}{5} + 1 = \frac{2}{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow T = a+b = 2+5 = 7.$$

Câu 46. Phương trình $\cos x + \cos 3x + 2 \cos 5x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2022\pi)$?

A. 10110.

B. 4044.

C. 2022.

D. 6066.

Lời giải

Chọn A

$$\cos x + \cos 3x + 2 \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 5x + \cos x) + (\cos 5x + \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cdot \cos 2x + 2 \cos 4x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \cos 2x + \cos 4x \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x [(4 \cos^2 x - 3) \cos 2x + \cos 4x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x [(2 \cos 2x - 1) \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên đoạn $[0; 2\pi]$ phương trình có 10 nghiệm và không có nghiệm $x = 0, x = 2\pi$.

Suy ra trên đoạn $[0; 2022\pi]$ phương trình có $10 \cdot 1011 = 10110$ nghiệm.

Vậy trên khoảng $(0; 2022\pi)$ phương trình có 10110 nghiệm.

Câu 47. Bác Hoa đem gửi tiết kiệm số tiền 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Bác gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 1,1%/1 quý. Số tiền còn lại bác gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất x %/1 tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được gộp vào gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Tính x (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy), biết rằng sau một năm, số tiền gốc và lãi bác Hoa thu được là 425.250.000 đồng.

A. 0,79.

B. 0,75.

C. 0,98.

D. 0,85.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là số tiền bác Mai gửi và $r\%$ là lãi suất mỗi kỳ hạn.

Sau kỳ hạn thứ nhất, bác Hoa có số tiền là $A + A \cdot r\% = A(1 + r\%)$.

Sau kỳ hạn thứ hai, bác Hoa có số tiền là $A(1+r\%) + A(1+r\%) \cdot r\% = A(1+r\%)^2$.

Tương tự như vậy, sau n kỳ hạn, bác Hoa có số tiền là $A(1+r\%)^n$.

Như vậy, sau một năm, bác Hoa có tổng số tiền là

$$250.000.000.(1+1,1\%)^4 + 150.000.000(1+x\%)^{12} = 425.250.000.$$

Suy ra $x \approx 0,75$.

Câu 48. Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 \leq x, y \leq 2022$ và

$$(xy + 2x + 3y + 6) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 4y - xy - 8) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right)$$

A. 6054.

B. 3.

C. 4036.

D. 2020.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{2y}{y+2} > 0 \\ \frac{2021x+1}{x-4} > 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $0 \leq x, y \leq 2022$ suy ra $x \geq 5; y \geq 1$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2021x+1}{x-4}$ trên $[5; +\infty)$

Có $f(x) = \frac{-8085}{(x-4)^2} < 0, \forall x \geq 5$ và ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2021$.

Suy ra $2021 < f(x) \leq 10106 \Rightarrow \log_3 f(x) > 0, \forall x \geq 5$.

Ta có

$$\begin{aligned} (xy + 2x + 3y + 6) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) &\leq (2x + 4y - xy - 8) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right) \\ \Leftrightarrow (x+3)(y+2) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) &\leq (x-4)(2-y) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

TH1: $y > 2$ ta có $2y > y+2 > 0 \Rightarrow \frac{2y}{y+2} > 1 \Rightarrow (x+3)(y+2) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) > 0$.

Mặt khác $y > 2 \Leftrightarrow 2-y < 0 \Rightarrow (x-4)(2-y) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right) < 0$.

Suy ra $y > 2$ thì bpt (*) không thỏa mãn.

TH2: $y \leq 2$.

Suy ra $2y \leq y+2 \Rightarrow \frac{2y}{y+2} \leq 1 \Rightarrow (x+3)(y+2) \log_{2022} \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq 0$.

Với $y \leq 2 \Leftrightarrow 2-y \geq 0 \Rightarrow (x-4)(2-y) \log_{2021} \left(\frac{2021x+1}{x-4} \right) \geq 0$.

Do đó bpt (*) luôn đúng với $y \leq 2$.

Kết hợp điều kiện thì $y \in \{1; 2\}$.

Mà $x \in \{5; 6; \dots; 2022\}$ nên có $2 \cdot 2018 = 4036$ bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = 2a\sqrt{3}$, $BC = 4a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 30° . Thể tích khối trụ bằng.

A. $12\pi a^3$.

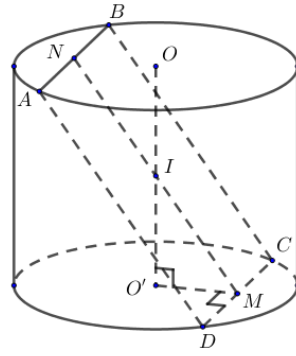
B. $16\sqrt{3}\pi a^3$.

C. $16\pi a^3$.

D. $12\sqrt{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO' .

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'} = 30^\circ$.

Ta có $IM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}BC = 2a$.

Xét $\triangle IO'M$ vuông tại O , ta có $IO' = IM \cdot \sin \widehat{IMO'} = a \Rightarrow h = OO' = 2IO' = 2a$
 $O'M = IM \cdot \cos \widehat{IMO'} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle O'MD$ vuông tại M , có $O'M = a\sqrt{3}; MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} \Rightarrow r = a\sqrt{6}$.

Vậy $V = \pi r^2 h = 12\pi a^3$.

Câu 50 [Câu 42, MĐ 101, Đề THPT QG 2018]. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2.

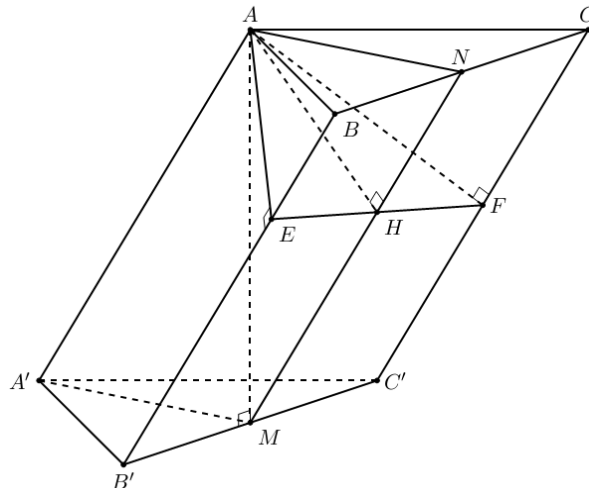
B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi N là trung điểm BC . Kẻ $AE \perp BB'$ tại E , $AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = H$ nên H là trung điểm EF .

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$, $d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$, $d(C, BB') = EF = 2$.

Nhận xét: $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên tam giác AEF vuông tại A , suy ra $AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Ta lại có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN // AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH.$

Tam giác AMN vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow AM = 2.$

Mặt khác $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow \text{Góc giữa mặt phẳng } (ABC) \text{ và } (AEF) \text{ là } \widehat{HAN}.$

Hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (AEF) là tam giác AEF nên $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \widehat{HAN}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{AH}{AN} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AE \cdot AF \cdot AN}{AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = 1.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AM = 2.$

----- Hết -----