

Câu 1 (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

Tìm điều kiện xác định và Rút gọn biểu thức Q.

2. Tìm số hữu tỉ x để biểu thức $P = \frac{x^2-4x}{x^2+2}$ có giá trị là một số nguyên dương.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 30 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 25 = y(y + 6)$$

c) Giải phương trình $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$.

Câu 3 (3,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

b) Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$

Câu 4 (7,0 điểm)

1. Cho hình vuông ABCD, có độ dài mỗi cạnh bằng a. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh $DE = CF$.

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

2. Cho 17 điểm nằm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm này lại bằng các đoạn thẳng và tô màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh cùng màu.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1 4 đ	a 2,5 đ	ĐKXD: $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 2$ $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$ $= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$ $= 1 + \frac{-2x^2+4x}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$ $= 1 + \frac{-2x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$ $= 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$	0,5

	c 2 đ	Đặt $x^2 + x = t$ thì phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 4t - 12 = 0$ $\Leftrightarrow (t - 2)(t + 6) = 0$ $\Rightarrow$ Tìm được $t = -6$ hoặc $t = 2$ +) $t = -6 \Leftrightarrow x^2 + x = -6 \Leftrightarrow (x + 1/2)^2 + 23/4 = 0$ (phương trình vô nghiệm) +) $t = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$ $\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -2\}$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25
3 3đ	a 1,5 đ	$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ $= \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$ Đặt $y = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow A = y^2 - 2y + 3 = (y - 1)^2 + 2 \geq 2$ $\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 1 \Rightarrow x = 2$ Vậy $\min A = 2$ khi $x = 2$.	0,5 0,5 0,5
	b 1,5 đ	Ta có: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{2}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2}$ $= \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{2ab + a^2 + b^2} = \frac{4}{(a + b)^2} + \frac{1}{2ab}$ Mà $a + b = 1 \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{ab}$ $\Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{4}{1} + 2 = 6$ Dấu "=" có $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$	0,5 0,5 0,25 0,25
5 7đ	1a 2,0đ		

		+) Xét tứ giác AEMF có $\angle A = \angle E = \angle F = 90^\circ$ nên tứ giác AEMF là hình chữ nhật $\Rightarrow AE = FM$ +) Tam giác DFM vuông cân tại F $\Rightarrow FM = DF$ $\Rightarrow AE = DF \Rightarrow$ dễ dàng chứng minh được $\triangle ADE = \triangle DCF$ (c-g-c) suy ra $DE = CF$ (hai cạnh tương ứng).	0,5 0,5 0,75 0,25
	1b 2,0đ	+) Vì tứ giác AEMF (cmt) $\Rightarrow AF = EM$ +) Tam giác EBM vuông cân tại E $\Rightarrow EB = EM$ $\Rightarrow AF = EB$ $\Rightarrow \triangle ABF = \triangle BCE$ (c-g-c) $\Rightarrow \angle ABF = \angle BCE \Rightarrow \angle ABF + \angle CBF = \angle BCE + \angle CBF = 90^\circ$ nên BF vuông góc CE tại K (với K là giao điểm của CE và BF) +) Từ $\triangle ADE = \triangle DCF$ (cmt), chứng minh tương tự như trên ta có: DE vuông góc với CF +) Gọi H là giao điểm của BF và DE, suy ra H là trực tâm của tam giác CEF $\Rightarrow CH$ vuông góc với EF +) Gọi N là giao điểm của BC và MF. Ta chứng minh được $CN = DF = FM$ và $MN = EB = EM$ $\Rightarrow \triangle FEM = \triangle CMN$ (c-g-c) $\Rightarrow \angle EFM = \angle MCN$. Gọi giao điểm của CM và EF là Q $\Rightarrow \angle NMC = \angle QMF$ và từ đó ta dễ dàng chứng minh được CM vuông góc với EF tại Q. Suy ra 3 đường thẳng DE, BF, CM đồng quy tại H.	0,5 0,5 0,5 0,5
	1c 2,0đ	Ta chứng minh được hình chữ nhật AEMF có chu vi bằng $2a$ không đổi $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi $\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất khi và chỉ khi $ME = MF$ Mà $ME = MF$ khi và chỉ khi tứ giác AEMF là hình vuông $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được tứ giác AEMF có diện tích lớn nhất bằng $\frac{1}{4}a^2$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2 1,0đ	+) Ta có 16 đoạn nối cùng một điểm A. +) Vì $16 = 5 \cdot 3 + 1$ nên ít nhất có 6 cạnh cùng được tô một màu, giả sử là AB, AC, AD, AE, AF, AH cùng màu đỏ. +) Xét các đoạn thẳng với các mút là 6 điểm B, C, D, E, F, H. +) Nếu tồn tại một cạnh, chẳng hạn BC màu đỏ thì ta thu được tam giác ABC có các cạnh cùng màu đỏ. +) Nếu tất cả đều chỉ có màu xanh, màu vàng thì cũng tồn tại tam giác cùng màu.	0,25 0,25 0,25 0,25

Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.