

Câu 1: (4 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

b) Giải phương trình: $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0$

Câu 2: (5 điểm)a) Biết rằng đa thức $f(x)$ khi chia cho $x - 2$ thì được số dư là 6067; khi chia cho $x + 3$ thì được số dư là - 4043. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x^2 + x - 6$.b) Chứng minh rằng: Nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) đều là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(1 + x^2)(1 + y^2) + 4xy + 2(x + y)(1 + xy) = 25$

Câu 3: (3 điểm)

a) Cho a, b, c thỏa mãn $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 = 4abc$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$

b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn: $a \geq 2b$. Tìm GTNN của biểu thức $N = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

Câu 4 (6,0 điểm):

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle DBF$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

c) Chứng minh rằng: $\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{AC} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$

Câu 5: (2 điểm)Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Trên các đoạn AH, AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ$ ($E \neq B$). Chứng minh: $EF \parallel BC$

.....HẾT.....