UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022- 2023
Môn: Toán- Lớp 8
***Thời gian:* 150 phút** *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 07 tháng 3 năm 2023

Bài 1. (*4,0 điểm*)

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2023x^2+2022x+2023$.

2) Rút gọn $Q=\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x}+1-\frac{1}{x}\right]:\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}-\frac{x^3+1}{x^2+x}\right)$ (với $x\neq 0, x\neq \pm 1$).

3) Cho $a,b,c\neq 0$ và $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$ Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\frac{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}.$$

Bài 2. (*4,0 điểm*)

1) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn: $x^2-3xy+p^2y^2=12p$.

2) Giải phương trình: $\left(x^2-9\right)^2=12x+1$.

Bài 3. (*3,0 điểm*)

1) Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Biết rằng $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng $2a$, $2b$ có giá trị nguyên.

2) Cho a, b là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn $a+2b^2-2$ là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và $b+2a^2-2$ chia hết cho $a+2b^2-2$. Chứng minh $2a+3$ là số chính phương.

Bài 4. (*7,0 điểm*)

1) Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=2\widehat{C}$; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Đường vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

a) ΔABM là tam giác cân và $\widehat{ABC}=2\widehat{AKC}$;

b) MA.KN = MN.KA;

c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

2) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BCD}=\widehat{BDC}=50^0;\widehat{ACD}=\widehat{ADB}=30^0$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng tam giác ABI cân .

Bài 5. (*2,0 điểm*)

1) Cho x, y > 0 thỏa mãn: x + y = 1. Chứng minh: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{25}{2}$.

2) Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.

---------- Hết ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..; Số báo danh..............

UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Năm học 2022-2023
Môn thi: Toán - Lớp 8

Bài	Lời giải sơ lược	Điểm
1.1 (1,0 điểm)		
	Ta có: $x^4+2023x^2+2022x+2023$ $=\left(x^4-x\right)+2023\left(x^2+x+1\right)$	0,25
	$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2023\left(x^2+x+1\right)$	0,25
	$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2023\right)$	0,5
1.2 (1,5 điểm) 2) Rút gọn $Q=\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x}+1-\frac{1}{x}\right]:\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}-\frac{x^3+1}{x^2+x}\right)$ (với $x\neq 0, x\neq \pm 1$).		
	$Q=\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x}+1-\frac{1}{x}\right]:\left(\frac{x^3-1}{x^2-x}-\frac{x^3+1}{x^2+x}\right)$ $Q=\left[\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}+\frac{x(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x+1}{x(x+1)}\right]:\left[\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x(x-1)}-\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x(x+1)}\right]$	0,5
	$Q=\frac{x^2-2x+1+x^2+x-x-1}{x(x+1)}:\frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{x}$	0,25
	$Q=\frac{2x^2-2x}{x(x+1)}.\frac{x}{2x}$	0,25
	$Q=\frac{x-1}{x+1}$	0,25
	Vậy $Q=\frac{x-1}{x+1}$ với $x\neq 0, x\neq \pm 1$	0,25
1.3. (1,5 điểm) Cho $a,b,c\neq 0$ và $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$.		
	$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)=2(ab+bc+ca)$ $\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$ $\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$	0,5

	$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \Rightarrow a=b=c \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases}$	0,5
	Thay b = a, c = a vào biểu thức $T = \dfrac{a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$ ta được: $T = \dfrac{a^{2022}+a^{2022}+a^{2022}}{(a+a+a)^{2022}} = \dfrac{3a^{2022}}{9a^{2022}} = \dfrac{1}{3}$.	0,5
2.1. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn: $x^2-3xy+p^2y^2=12p$.		
	Ta có $x^2-3xy+p^2y^2=12p \Rightarrow x^2+p^2y^2=3xy+12p \vdots 3$ Ta có số chính phương chia 3 dư 0, 1 $\Rightarrow x \vdots 3;\ py \vdots 3$	0,5
	$\Rightarrow x^2+(py)^2 \vdots 9 \Rightarrow 3xy+12p \vdots 9$ mà $x \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p=3$ (do p nguyên tố)	0,25
	Thay p =3 vào phương trình $x^2-3xy+p^2y^2=12p$ ta có $x^2-3xy+9y^2=36$ $\Leftrightarrow 4x^2-12xy+36y^2=144$ $\Leftrightarrow (2x-3y)^2+27y^2=144$	0,25
	$\Rightarrow 27y^2 \le 144 \Rightarrow y^2 \le 5$ mà y^2 là chính phương và y nguyên dương $y^2 \in \{1;4\}$	0,25
	Nếu $y^2=1 \Rightarrow (2x-3y)^2=117$ (loại vì 117 không chính phương)	0,25
	Nếu $y^2=4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (2x-6)^2=36 \Rightarrow x=6$ vì x, y nguyên dương. Vậy x = 6; y= 2; p=3	0,5
2.2. (2,0 điểm) Giải phương trình: $(x^2-9)^2=12x+1$.		
	$(x^2-9)^2=12x+1 \Leftrightarrow x^4-18x^2+81=12x+1$ $\Leftrightarrow x^4+18x^2+81=36x^2+12x+1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2+9)^2=(6x+1)^2$ $\Leftrightarrow (x^2+9)^2-(6x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow (x^2+9+6x+1)(x^2+9-6x-1)=0$ $\Leftrightarrow (x^2+6x+10)(x^2-6x+8)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+10=0\ (1) \\ x^2-6x+8=0\ \ (2) \end{array}\right.$	0,25
	Giải (1) : $x^2+6x+10=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+1=0$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm	0,25

	Giải (2): $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x^2-2x-4x+8=0$ $\Leftrightarrow x(x-2)-4(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$	0,5
	Tập nghiệm của phương trình đã cho $S=\{2;4\}$	0,25
3.1 (1,5 điểm) Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Biết rằng $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng $2a$, $2b$ có giá trị nguyên.		
	$f(0)=c\ \ (1), f(1)=a+b+c\ \ (2), f(2)=4a+2b+c\ \ (3)$ là các số nguyên .	0,5
	Từ (1) và (2)$\Rightarrow a+b\in Z \Rightarrow 2a+2b\in Z$ (4)	0,25
	Từ (1) ,(3)và (4) suy ra $2a$ là số nguyên. .	0,25
	Từ (4) và $2a$ nguyên suy ra $2b$ nguyên	0,25
	Vậy $2a$, $2b$ có giá trị nguyên.	0,25
3.2. (1,5 điểm) Cho a, b là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn $a+2b^2-2$ là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và $b+2a^2-2$ chia hết cho $a+2b^2-2$. Chứng minh $2a+3$ là số chính phương.		
	Đặt: $a+2b^2-2=p^k$; p nguyên tố khác 13; $k\in\mathbb{N}^*$ do a, b lớn 1 và $b+2a^2-2 \vdots a+2b^2-2$ $\Rightarrow \begin{cases} b+2a^2-2-(a+2b^2-2) \vdots p^k \\ b+2a^2-2 \geq a+2b^2-2 \end{cases}$ Vì $\Rightarrow \begin{cases} (a-b)(2a+2b-1) \vdots p^k \\ (a-b)(2a+2b-1)>0\,(do\, a\neq b, a,b>1) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} a-b \vdots p^m \\ 2a+2b-1 \vdots p^n \quad (m,n\in\mathbb{N}; m+n=k) \\ a>b \end{cases}$	0,5
	TH1: Nếu $m\neq 0 \Rightarrow n\neq 0$ vì $a-b<a+2b^2-2$	0,5

<table>
<tr><td></td><td>

$\Rightarrow \begin{cases} a-b \,\vdots\, p \\ 2a+2b-1 \,\vdots\, p \end{cases} \quad \Rightarrow 4a-1 \,\vdots\, p$

Lại có:

$b+2a^2-2 \,\vdots\, a+2b^2-2=p^k$
$\Rightarrow b+2a^2-2 \,\vdots\, p \Rightarrow 2b+4a^2-4 \,\vdots\, p$
$\Rightarrow 4a^2-2a-3 \,\vdots\, p$
$\Rightarrow 4a^2-a-(a+3) \,\vdots\, p$
$\Rightarrow a+3 \,\vdots\, p$

Kết hợp với $4a-1 \,\vdots\, p \Rightarrow 13 \,\vdots\, p \Rightarrow p=13$ vì p nguyên tố (loại)

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

TH2: Nếu m = 0

$\Rightarrow 2a+2b-1 \,\vdots\, p^k \Rightarrow 2a+2b-1 \,\vdots\, a+2b^2-2$
$\Rightarrow 2a+2b-1 \geq a+2b^2-2$
$\Rightarrow a \geq 2b^2-2b-1 \ (1)$

Ta lại có:

$2\left(a+2b^2-2\right)-\left(2a+2b-1\right) \,\vdots\, a+2b^2-2$
$\Rightarrow 4b^2-2b-3 \,\vdots\, a+2b^2-2$
$\Rightarrow 4b^2-2b-3 \geq a+2b^2-2 \Rightarrow 2b^2-2b-1 \geq a \ (2)$

Từ (1) và (2) $a=2b^2-2b-1 \Rightarrow 2a+3=\left(2b-1\right)^2$ là chính phương (đpcm)

</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="3">

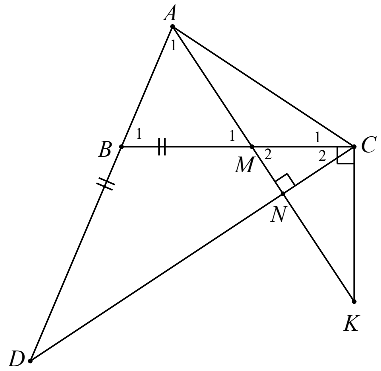
4.1. (5,5 điểm) 1) Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=2\widehat{C}$; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Đường vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

a) ΔABM là tam giác cân và $\widehat{ABC}=2\widehat{AKC}$;

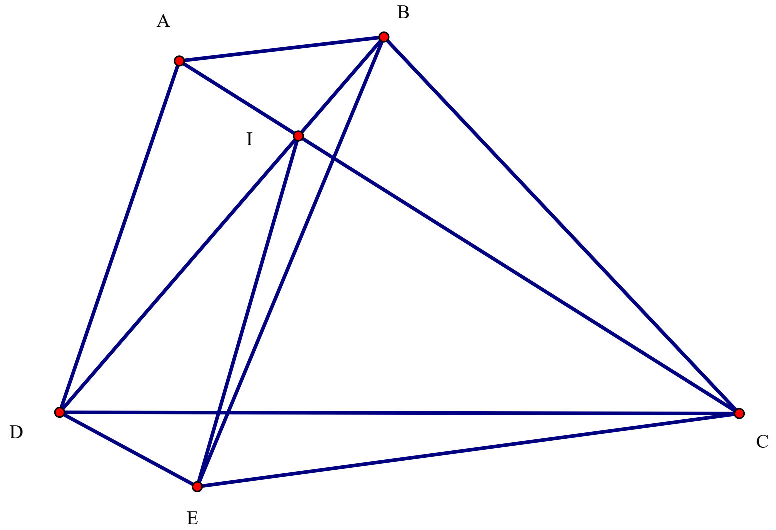
b) MA.KN = MN.KA;

c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

</td></tr>
<tr><td></td><td>Vẽ hình + Giả thiết, kết luận</td><td>0,25</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\widehat{A}_1+\widehat{D}=90^0, \widehat{M}_2+\widehat{C}_2=90^0$ (1)
$BD=BC \Rightarrow \Delta BCD$ cân tại B
$\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{C}_2$ (2)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{A}_1=\widehat{M}_2$
$\widehat{M}_1=\widehat{M}_2$ (2 góc đối đỉnh)
$\Rightarrow \widehat{A}_1=\widehat{M}_1 \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta lại có $\widehat{D}+\widehat{A_1}=90^0; \widehat{K}+\widehat{M_2}=90^0$ mà $\widehat{A}_1=\widehat{M}_2 \Rightarrow \widehat{D}=\widehat{K}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Mà $\widehat{ABC}=2\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABC}=2\widehat{AKC}$ (đpcm)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>. $\widehat{C}_1=\dfrac{\widehat{ABC}}{2}, \widehat{C}_2=\dfrac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{C}_1=\widehat{C}_2 \Rightarrow$ CM là đường phân giác của ΔACN</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow \dfrac{AM}{MN}=\dfrac{CA}{CN}$ (3)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Chứng minh được CK là tia phân giác của góc ngoài tại C của ΔACN
$\Rightarrow \dfrac{AK}{KN}=\dfrac{CA}{CN}$ (4)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MN}=\dfrac{KA}{KN} \Rightarrow MA.KN=KA.MN$ (đpcm)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$\widehat{D}=\widehat{C}_2$ (Theo (2)), $\widehat{B}_1=\widehat{D}+\widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{B}_1=2\widehat{D}$
$\widehat{B}_1=2\widehat{C}_1$ (GT)
$\Rightarrow \widehat{C}_1=\widehat{D}$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

	Xét ΔABC và ΔACD có: $\widehat{BAC}$ là góc chung, $\widehat{C_1} = \widehat{D}$ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB.AD$ $\Rightarrow AC^2 = AB(AB+BD) = AB(AB+BC)$	0,25
	Đặt AB = c; AC = b; BC = a Ta có: $b^2 = c(c+a) \Rightarrow (b-c)(b+c) = c.a$ (*) Vì a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp, ta có các trường hợp: TH1: $b-c=1 \Rightarrow b=c+1$ $\Rightarrow 2c+1=ca$ $\Leftrightarrow c(a-2)=1$ $\Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=3 \quad (loai) \\ b=2 \end{cases}$	0,5
	TH2: $b-c=2 \Rightarrow b=c+2$ $\Rightarrow a=c+1$ Thay vào (*) ta được: $2(2c+2)=c(c+1)$ $\Leftrightarrow c^2-3c-4=0$ $\Rightarrow c=4 \Rightarrow a=5 \Rightarrow b=6$ Vậy 3 cạnh của tam giác là 4; 5; 6.	0,5
4.2(1,5 điểm) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 50^0; \widehat{ACD} = \widehat{ADB} = 30^0$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng tam giác ABI cân .		
	Giả thiết, Kết luận + hình vẽ	0,25

	 	
	Từ giả thiết $\Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{CIB} = 80^0 \Rightarrow CB = CI; \widehat{BCI} = 20^0$	0,25
	Vẽ tam giác đều BCE (E thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A). $\Rightarrow \Delta BDE = \Delta CBI\left(cgc\right)$ $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BDE} = 80^0 \\ DE = BI \end{cases}$ $\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIC} = \widehat{IDE}\left(=80^0\right)$ $\Rightarrow AI//DE\left(1\right)$	0,5
	$Do: \widehat{DIE} = \widehat{DIC} - \widehat{EIC}$ $= 100^0 - \dfrac{180^0 - \widehat{ECI}}{2}\left(CI = CE = CB\right)$ $= 30^0$ $\Rightarrow \widehat{DIE} = \widehat{ADI}\left(=30^0\right) \Rightarrow AD//IE\left(2\right)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác AIED là hình bình hành nên DE = AI. Mà DE = BI Suy ra AI = BI do đó tam giác ABI cân tại I.	0,5

5.1. (1,0 điểm) Cho x, y > 0 thỏa mãn: x + y = 1. Chứng minh: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.		
	Ta có: $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ dấu = xảy ra khi a = b Áp dụng ta có: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}.\left(x+y+\frac{x+y}{xy}\right)^2$ $=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2$	0,5
	Mặt khác: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2=\frac{25}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi x = y = 1/2	0,5
5.2 (1,0 điểm) Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.		
	Vì đa giác đều có số đỉnh là 2019 (số lẻ) nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau được tô cùng 1 màu, gọi 2 đỉnh đó là A và B. Mặt khác đa giác đều này tồn tại 1 đỉnh M nào đó nằm trên đường trung trực của AB.	0,25
	- Nếu M được tô cùng màu với A và B , ta có tam giác MAB thỏa mãn đề bài.	0,25
	- Nếu M khác màu với A và B ta gọi đỉnh E kề với đỉnh A; gọi đỉnh F kề với đỉnh B và xảy ra trường hợp: + Nếu cả E và F khác màu với A , B thì ta có M,E,F cùng màu suy ra tam giác MEF thỏa mãn đề bài.	0,25

	+ Nếu có ít nhất 1 đỉnh E hoặc F cùng màu với A và B , giả sử đỉnh E thì ta có tam giác ABE thỏa mãn đề bài. Vậy bài toán được chứng minh.	0,25