TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10, LỚP 11
NĂM HỌC : 2021 – 2022
ĐỀ THI MÔN : TOÁN
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu I: *(5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2\left(x-1\right)^2 + 2} \\ \dfrac{1}{x-1} = 2\left(y-x\right)+1 \end{cases}$ trên tập số thực.

2) Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau mà mỗi chữ số lẻ xuất hiện đúng một lần và ba chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần.

Câu II: *(4 điểm)*

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n không vượt quá 44 thỏa mãn điều kiện:

$$22^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 (\operatorname{mod} n).$$

2) Tìm tất cả các bộ ba số thực x, y, z thuộc $\left[4;40\right]$ thỏa mãn $x + y + z = 62$ và $xyz = 2880$.

Câu III: *(3 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{337}{2} \\ u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n = \dfrac{n(n+2)u_n}{3}, (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$

1) Tìm hệ thức liên hệ giữa u_n và u_{n-1} $(n = 2, 3, \dots)$.

2) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2.u_n$.

Câu IV: *(6 điểm)* Cho tam giác ABC và điểm P thuộc miền trong tam giác ABC. Lấy điểm Q sao cho các đường thẳng AQ, BQ, CQ lần lượt đối xứng với các đường thẳng AP, BP, CP qua đường phân giác trong của các góc A, B, C. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của P lên AB, AC; K, L lần lượt là hình chiếu của Q lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, K, L cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

b) Gọi T là giao điểm của MN và KL. Chứng minh rằng $AT \perp PQ$.

Câu V: *(2 điểm)* Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \le 1.$$

HẾT