

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 6x$

b) $(3x - 2)^3 + (1 - 2x)^3 + (1 - x)^3$

Bài 2 (4 điểm)

a) Cho $x, y, z \neq 0, x + y + z \neq 0$. Chứng minh rằng:

Nếu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ thì $\frac{1}{x^{2021}} + \frac{1}{y^{2021}} + \frac{1}{z^{2021}} = \frac{1}{x^{2021} + y^{2021} + z^{2021}}$

b) Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$

Bài 3.(3điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng khi chia $f(x)$ cho $(x - 1)$ dư 4, chia $f(x)$ cho $(x + 2)$ dư 1, chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x + 2)$ thì được thương là $5x^2$ và còn dư.

b) Chứng minh rằng: Nếu m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp thì

$P = mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Bài 4. (2 điểm).

Cho ΔABC có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c , chu vi của tam giác là $2p$.

Chứng minh rằng: $\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} \geq 9$

Bài 5. (6 điểm)

Cho đoạn thẳng AB và một điểm M bất kì trên đoạn thẳng đó (M khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$ có tâm đối xứng lần lượt là hai điểm O và I . Gọi N là giao điểm của AE và BC , P là giao điểm của AC và BE .

a) Chứng minh: E là trực tâm của ΔABC từ đó suy ra BC vuông góc với AE .

b) Chứng minh: 3 điểm D, N, F thẳng hàng.

c) Gọi K là giao điểm của AC và MN . Chứng minh: $AP \cdot CK = AK \cdot CP$

d) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng AB sao cho đoạn thẳng MN có độ dài lớn nhất.

Bài 6.(1 điểm)

Người ta dùng các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 để gán cho các đỉnh của một hình lập phương, hai đỉnh khác nhau thì gán các số khác nhau. Sau đó tính tổng ở hai đỉnh kề nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai tổng bằng nhau.