

MÔN: TOÁN

(Thời gian 150 phút - không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (2,0 điểm) Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{x^5}{30} - \frac{x^3}{6} + \frac{2x}{15}$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Câu 2: (4,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$

2) Biết rằng $x, y > 0$ thỏa mãn: $\frac{x}{2} + \frac{8}{y} \leq 2$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}$

3) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$
Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{a(4-b)(4-c)} + \sqrt{b(4-c)(4-a)} + \sqrt{c(4-a)(4-b)} - \sqrt{abc}$$

Câu 3: (2,0 điểm) Giải phương trình sau: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Câu 4: (2,0 điểm) Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 48 lít và can thứ hai đang chứa 32 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.

Câu 5: (4,0 điểm)

1) Chứng minh rằng: $n^2 + 7n + 2014$ không chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n .

2) Cho $x + \frac{1}{x} = 4$. Tính giá trị của biểu thức: $Q = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2025$

Câu 6: (3,0 điểm) Cho đường thẳng $y = (m - 2)x - 2m + 1$ (d)

1) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m

2) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất

3) Tìm m để đường thẳng d tạo với các trục tọa độ tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$

Câu 7: (3,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng: MN vuông góc với AB

b) Gọi E là giao điểm của BM và Ax. Chứng minh rằng: AC = CE

c) Gọi K là giao điểm của AD và đường tròn (O).

Chứng minh rằng: BM.BE = AK.AD