

Bài 1 (5 điểm). Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - 8\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 4} + \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4}$ (với $x \geq 0$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$.

Bài 2 (4 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

b) Tìm n là số tự nhiên sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Bài 3 (4 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0$.

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $3x^2 + y^2 = 2(xy + 4)$.

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết $BC = 8\text{cm}$, $BH = 2\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, AH.

b) Trên cạnh AC lấy điểm K tùy ý ($K \neq A$, $K \neq C$), gọi D là hình chiếu của A trên BK.

Chứng minh rằng: $S_{BHD} = \frac{1}{4} S_{BKC} \cos^2 \widehat{ABD}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(\sin \widehat{ACB} + \cos \widehat{ACB})^2 = 1 + \sin \widehat{AMB}$.

Bài 5 (2 điểm). Trên bảng viết 100 phân số $\frac{1}{100}; \frac{2}{100}; \frac{3}{100}; \dots; \frac{100}{100}$. Ta thực hiện trò chơi như sau:

tại mỗi bước, xóa đi hai số a, b bất kì trên bảng, nhưng lại viết thêm số $(a - b + ab)$. Sau một số lần thực hiện quy tắc trên thì trên bảng còn lại đúng một số, chứng minh rằng đó là số tự nhiên.

----- Hết -----
(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....