

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 28/03/2023

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$ (với $|a| > |b| > 0$).

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{6} < \frac{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} < \frac{5}{27}$ (trong đó biểu thức chứa căn có

2023 dấu căn ở tử số và 2022 dấu căn ở mẫu số).

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - (4m + 1)x + 4m^2 - 1 = 0$ (với m là tham số).

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 < 0$ và $|x_1| < x_2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 3 \\ 2\sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 1 \end{cases}.$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{x + 2z}{x + z} \geq \frac{5}{2}$$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho ΔABC nhọn không cân tại đỉnh A , nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường cao AH của ΔABC ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến các đường thẳng AB, AC .

a) Chứng minh tứ giác $BCQP$ nội tiếp.

b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M , đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A). Chứng minh rằng $MH^2 = MK \cdot MA$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQP$. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Bài 5. (1,0 điểm)

Tìm độ dài nhỏ nhất của cạnh một hình vuông sao cho có thể đặt vào trong nó 5 hình tròn có bán kính bằng 1, biết rằng các hình tròn này đôi một không có quá một điểm chung.

-----Hết-----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

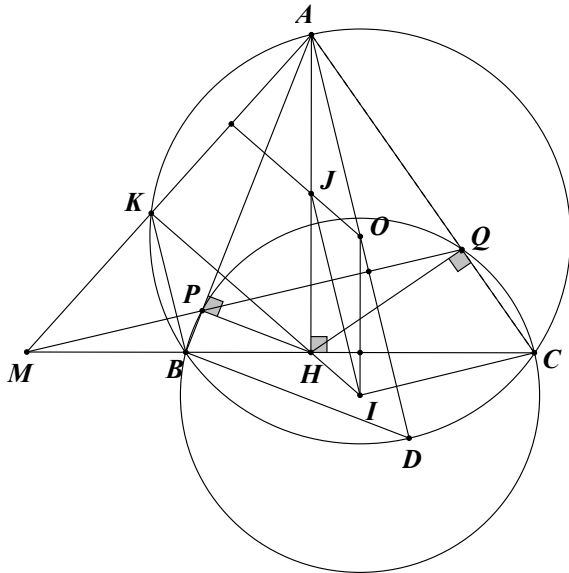
Ngày thi: 28/03/2023

(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 1 (2 điểm)	1a. (1,0 điểm) Với $a > b > 0$ ta có $A = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$ $= \frac{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right)^2 - \left(a + \sqrt{a^2 - b^2} \right)^2}{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right) \left(a + \sqrt{a^2 - b^2} \right)} \cdot \frac{b^2}{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}$	0,25
	$= \frac{-4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4 a \sqrt{a^2 - b^2}}$	0,25
	$= -\frac{a}{ a }$	0,25
	$= \begin{cases} -1 & \text{khi } a > 0 \\ 1 & \text{khi } a < 0 \end{cases}$	0,25
	1b. (1,0 điểm) Đặt $A = \frac{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}$ và $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$ (Với 2023 dấu căn).	0,25
	suy ra $a^2 - 6 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$ (Với 2022 dấu căn) Và $A = \frac{3 - a}{3 - (a^2 - 6)} = \frac{1}{3 + a} \quad (1)$	0,25
	Ta có $a < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + 3}}}}$ (Với 2023 dấu căn) $\Rightarrow a < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{3 + a} \quad (2)$	0,25
	Ta có $2,4 < \sqrt{6} < a \Rightarrow \frac{1}{3 + a} < \frac{1}{3 + 2,4} = \frac{5}{27} \quad (3)$ Từ (2) và (3) suy ra $\frac{1}{6} < A < \frac{5}{27}$.	0,25
	2 a. (1,0 điểm) Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho.	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Ta có $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ -x_2 < x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 < 0 \\ 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < \frac{1}{4} \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$. Vậy $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$.	0,25
b. (1,0 điểm)		
	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 3 \\ 2\sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 1 \end{cases} \quad (I)$	
	ĐKXD: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \neq 0$.	
	Với $x = 0, y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình $(I) \Rightarrow x > 0, y > 0$	0,25
	Do đó: $\begin{cases} 2\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 3 \\ 2\sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{2}{x+y} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{4}{x+y} = \frac{9}{4x} - \frac{1}{4y} \Rightarrow x^2 + 8xy - 9y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+9y) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -9y \end{cases}$ Vì $x > 0, y > 0$ nên $x = -9y$ (không thỏa mãn).	0,25
	Với $x = y$ ta có $2 = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$. Ta thấy $(x; y) = (1; 1)$ thỏa mãn hệ phương trình (I). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.	0,25
3a. (1,0 điểm)		
Bài 3 (2 điểm)	Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x+2)(4x^2 + 6x - 3)$	

Bài	Đáp án	Điểm
	Đặt $(x+2)(4x^2+6x-3) = k^2$	
	Gọi $(x+2, 4x^2+6x-3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$ Ta có $(x+2, 4x^2+6x-3) = d$ $\Rightarrow x+2 \vdots d \Rightarrow (x+2)(4x-2) \vdots d \Rightarrow 4x^2+6x-4 \vdots d$ Ta lại có $4x^2+6x-3 \vdots d \Rightarrow (4x^2+6x-3) - (4x^2+6x-4) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1.$	0,25
	Vậy $(x+2, 4x^2+6x-3) = 1$ mà $(x+2)(4x^2+6x-3) = k^2$ nên ta có $x+2$ và $4x^2+6x-3$ là số chính phương Đặt $x+2 = a^2$ và $4x^2+6x-3 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Vì x nguyên dương nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2+12x+9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2.$	0,25
	Vì b lẻ nên $b^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+6x-3 = 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow x = 2.$ Với $x = 2$ ta có $4x^3+14x^2+9x-6 = 100 = 10^2$ là số chính phương.	0,25
3b. (1,0 điểm)		
	Với $x > 0, y > 0, z > 0$ ta có $\frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z}$ $= \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1} + \frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$ $= \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} + \frac{1+2c^2}{1+c^2} \text{ trong đó } a^2 = \frac{x}{y}; b^2 = \frac{y}{z}; c^2 = \frac{z}{x} \text{ và}$ $a > 0, b > 0, c > 0, c \leq 1$ do $x \geq z.$	0,25
	Ta có $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} - \frac{2ab}{ab+1}$ $= \frac{a^2(a^2+1)(ab+1) + b^2(b^2+1)(ab+1) - 2ab(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}$ $= \frac{ab(a^2-b^2)^2 + (a-b)^2(a^2+ab+b^2) + (a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0$	0,25
	Do đó $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} \geq \frac{2ab}{ab+1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2}{1+c} \quad (1)$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b.$ Khi đó	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	$\frac{2}{1+c} + \frac{1+2c^2}{c^2+1} - \frac{5}{2} = \frac{2.2(1+c^2)+2.(1+c)(1+2c^2)-5(1+c)(1+c^2)}{2(1+c)(1+c^2)}$ $= \frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)(1+c^2)} = \frac{(1-c)^3}{2(1+c)(1+c^2)} \geq 0 \quad (0 < c \leq 1) \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$	0,25
Bài 4 (3 điểm)		
	4a. (1,0 điểm)	
	$\widehat{APH} + \widehat{AQH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \left(HP \perp AB, HQ \perp AC \right)$	0,25
	$\Rightarrow$ Tứ giác $APHQ$ nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow \widehat{PQA} = \widehat{PHA}$ mà $\widehat{PHA} = \widehat{PBC}$ (cùng phụ $\widehat{BAH}$)	0,25
	Do đó $\widehat{PQA} = \widehat{PBC} \Rightarrow$ Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.	0,25
	4b. (1,0 điểm)	
	$\Delta MPB \sim \Delta MCQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MP}{MC} = \frac{MB}{MQ} \Rightarrow MP.MQ = MB.MC \quad (1)$	0,25
	$\Delta MBK \sim \Delta MAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MK.MA = MB.MC \quad (2)$	0,25
	Ta có $\widehat{BHP} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ $\widehat{AHP}$) $\widehat{BAH} = \widehat{PQH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HP}$) $\Rightarrow \widehat{BHP} = \widehat{PQH}$	0,25
	$\Rightarrow \Delta MHP \sim \Delta MQH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MH}{MQ} = \frac{MP}{MH} \Rightarrow MH^2 = MP.MQ \quad (3)$	
	Từ (1),(2) và (3) suy ra $MH^2 = MK.MA$.	0,25
	4c. (1,0 điểm)	
	Vẽ đường kính AD của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0$.	0,25
	Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{AQP} = \widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow AD \perp PQ$.	
$\Delta MKH \sim \Delta MHA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MHA} = 90^0$.	0,25	

Bài	Đáp án	Điểm
	$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính AH và $HK \perp AM$ (4)	
	Gọi J là trung điểm của AH. Ta có J là tâm của đường tròn đi qua 5 điểm A, K, P, H, Q. Có (I) và (J) cắt nhau tại $P, Q \Rightarrow IJ \perp PQ$ (tính chất đường nối tâm) mà $AD \perp PQ \Rightarrow AD // IJ$. Ta có $AO // IJ$ và $AJ // OI \Rightarrow$ Tứ giác $AJOI$ là hình bình hành $\Rightarrow AJ = JH = OI$ mà $AH // OI \Rightarrow$ Tứ giác $JOIH$ là hình bình hành $\Rightarrow IH // OJ$.	0,25
	mà $OJ \perp AK$ (tính chất đường nối tâm) $\Rightarrow IH \perp AM$ (5) Từ (4), (5) $\Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng.	0,25
Bài 5 (1 điểm)	Bài 5. (1,0 điểm)	
	Gọi độ dài nhỏ nhất của cạnh một hình vuông $ABCD$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là x. Từ đây suy ra các tâm của 5 hình tròn này nằm trong hoặc trên cạnh của hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $x - 2$ (như hình vẽ)	0,25
	Chia hình vuông $MNPQ$ thành 4 hình vuông nhỏ có độ dài mỗi cạnh là $\frac{x-2}{2}$. Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai tâm hình tròn nằm trong hoặc trên cạnh của một hình vuông nhỏ. Giả sử hai tâm đó là I và J.	0,25
	Vì hai hình tròn này có không quá 1 điểm chung trong nên IJ không nhỏ hơn hai lần bán kính và không lớn hơn độ dài đường chéo của hình vuông cạnh $\frac{x-2}{2}$. Suy ra $2 \leq IJ \leq \frac{(x-2)\sqrt{2}}{2}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{(x-2)\sqrt{2}}{2} \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow x \geq 2+2\sqrt{2}$ Vậy độ dài nhỏ nhất của cạnh hình vuông cần tìm là $2+2\sqrt{2}$.	0,25

Chú ý:

- Thí sinh làm theo cách khác nếu đúng thì cho điểm tối đa.
- Tổng điểm bài thi: 10 điểm .

----- Hết -----