

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a}{a+1} + \sqrt{1+a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $-1 < a < 0$.

2) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $z^2 = x^3 + y^3 = 3xy + z$.

Tính giá trị biểu thức: $M = \sqrt{2025 - (x+y)^{2022} + z^{2022}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$

2) Giải phương trình: $\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} + 8x^2 = 40$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho hai số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y)$. Chứng minh rằng x và y là hai số chính phương liên tiếp.

2) Tìm các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $(x+y)^6 - 30y = x$.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm M sao cho $\angle BMC = 90^\circ$. Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác BAC, BMC, BHC.

a) Chứng minh rằng: $S_1 = \sqrt{S \cdot S_2}$

b) Gọi K, P lần lượt là hình chiếu của D trên BE, CF. Chứng minh rằng $KP \parallel EF$

2) Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M, N, P. Đặt S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích các tam giác ANP, BMP, CMN, ABC. Chứng minh rằng: $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \leq \frac{1}{64} S^3$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số a, b, c dương, thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca}$$

----- Hết -----

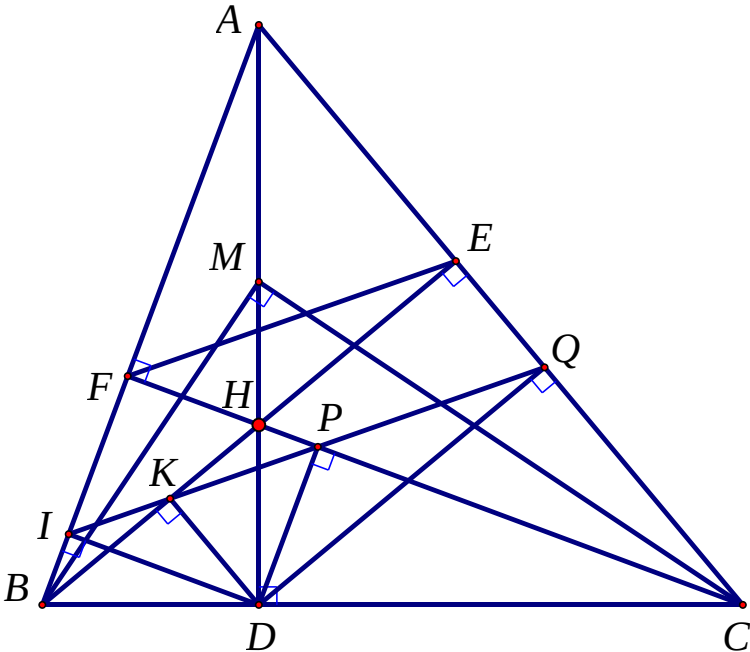
*** Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài.**

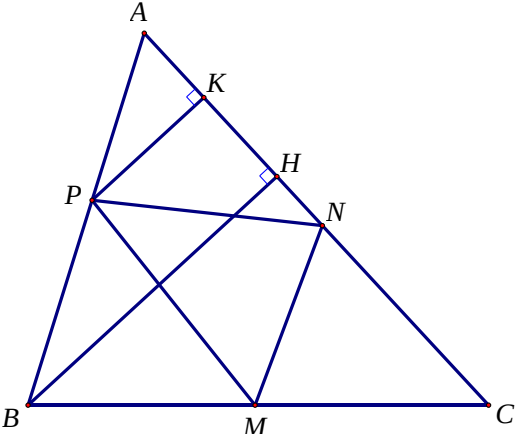
HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 - VÒNG II
Năm học 2022 - 2023
MÔN: TOÁN 9

(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2 điểm)	1) Rút gọn: $P = \frac{a}{a+1} + \sqrt{1+a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $-1 < a < 0$.	
	Ta có $\left(1+a - \frac{a}{a+1}\right)^2 = (1+a)^2 - 2a + \frac{a^2}{(a+1)^2} = 1+a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}$	0,25
	Do đó $\sqrt{1+a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}} = \left 1+a - \frac{a}{a+1}\right $	0,25
	với $-1 < a < 0 \Rightarrow a+1 > 0; \frac{a}{a+1} < 0 \Rightarrow a+1 - \frac{a}{a+1} > 0$	0,25
	Suy ra $P = \frac{a}{a+1} + a+1 - \frac{a}{a+1} = a+1$	0,25
	2) Cho $x; y; z$ là các số dương thỏa mãn: $z^2 = x^3 + y^3 = 3xy + z$.	
	Tính giá trị biểu thức: $M = \sqrt{2025 - (x+y)^{2022} + z^{2022}}$	
	Có $\begin{cases} z^2 = x^3 + y^3 \\ z^2 = 3xy + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = x^3 + y^3 \\ z^3 = 3xyz + z^2 \end{cases} \Rightarrow z^3 = 3xyz + x^3 + y^3$	0,25
	$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz = 0$	
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y-z)\left[(x+z)^2 + (y+z)^2 + (x-y)^2\right] = 0$	0,25
2 (2 điểm)	Vì $x; y; z$ là các số dương nên $x+y-z=0 \Leftrightarrow x+y=z \Leftrightarrow (x+y)^{2022} = z^{2022}$	0,25
	Suy ra $M = \sqrt{2025 - (x+y)^{2022} + z^{2022}} = \sqrt{2025} = 45$	0,25
	1) Giải phương trình: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$	
	ĐK: $x \neq -1$ $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15 \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15 - 2x \cdot \frac{x}{x+1}$ $\Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2x \cdot \frac{x}{x+1} - 15 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 15 = 0$	0,25
	Đặt $\frac{x^2}{x+1} = a$, PT trở thành $a^2 + 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 16$	0,25

3 (2 điểm)	Giải được $\begin{cases} a = 3 \\ a = -5 \end{cases}$	
	* Với $a = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0$ Giải được $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$	0,25
	* Với $a = -5 \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0$ Giải được $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$ Đối chiếu với điều kiện và kết luận nghiệm	0,25
	2) Giải phương trình: $\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} + 8x^2 = 40$	
	ĐK: $5 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ $\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} + 8x^2 = 40 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 \cdot \sqrt{5-x^2} = 40 \cdot \sqrt{5-x^2}$ $\Leftrightarrow x^3 + 8\sqrt{5-x^2} \cdot (x^2 - 5) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^3 = (2\sqrt{5-x^2})^3 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5-x^2} (*)$	0,25
	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4(5-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4 \end{cases}$	0,25
	Giải được $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ Đối chiếu và kết luận $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0,25
	1) Cho hai số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y)$. Chứng minh rằng x và y là hai số chính phương liên tiếp.	
	Ta có $x^2 + y^2 + 1 = 2(xy + x + y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y = 4x$	0,25
	$\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 4x \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 2^2 \cdot x$ Do x, y là các số nguyên nên x là một số chính phương	0,25
	Đặt $x = a^2$ với a là một số tự nhiên, ta có: $\Leftrightarrow (a^2 - y + 1)^2 = (2a)^2$ $\Leftrightarrow a^2 - y + 1 = 2a \Leftrightarrow y = (a - 1)^2$	0,25
	Vì $x = a^2$ và $y = (a - 1)^2$ nên x và y là hai số chính phương liên tiếp.	0,25
	2) Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $(x + y)^6 - 30y = x$	
	Ta có: $(x + y)^6 - 30y = x$ $\Rightarrow (x + y)^6 = 30y + x \leq 30y + 30x = 30(x + y) (*)$	0,25

	$+ \text{ Nếu } x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	
	$\text{Thử lại thấy } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ thỏa mãn đề bài}$	0,25
	$+ \text{ Nếu } x + y > 0, \text{ từ } (*) \Rightarrow (x + y)^5 \leq 30 < 32 = 2^5$	
	$\Rightarrow x + y < 2 \Rightarrow x + y = 1$	
	$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$	0,25
	Thử lại và kết luận có hai cặp số thỏa mãn là $(0;0), (1;0)$	0,25
4 (3 điểm)	1) Vẽ hình: 	
	a) Chứng minh rằng: $S_1 = \sqrt{S.S_2}$	
	Ta có tam giác BMC vuông tại M, đường cao MD nên $MD^2 = BD.CD$	0,25
	Mặt khác $\triangle ADB \sim \triangle CDH(g.g) \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DH} \Leftrightarrow AD.DH = BD.CD$	0,25
	Do đó $MD^2 = AD.DH \Rightarrow \left(\frac{1}{2}MD.BC\right)^2 = \frac{1}{2}AD.BC.\frac{1}{2}DH.BC$	0,25
	Suy ra $S_1^2 = S.S_2 \Rightarrow S_1 = \sqrt{S.S_2}$	0,25
	b) Gọi K,P lần lượt là hình chiếu của D trên BE,CF. Chứng minh $KP \parallel EF$	
	Gọi I, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC. Ta có $HE \parallel DQ$ nên $\frac{AE}{EQ} = \frac{AH}{HD}$	0,25

	$HF//DI \text{ nên } \frac{AF}{FI} = \frac{AH}{HD}$ $\text{Do đó } \frac{AE}{EQ} = \frac{AF}{FI} \Rightarrow IQ//EF \text{ (1)}$	
	$\text{Lại có: } DI//EC \text{ nên } \frac{BI}{IF} = \frac{BD}{DC}$ $DK//EC \text{ nên } \frac{BD}{DC} = \frac{BK}{KE}$ $\text{Do đó } \frac{BI}{IF} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow IK//EF \text{ (2)}$ $\text{Tương tự ta có } PQ//EF \text{ (3)}$	0,5
	$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra bốn điểm I, K, P, Q thẳng hàng}$ $\text{Do đó } KP//EF$	0,25
	2) (1 điểm) Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M, N, P. Đặt S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích các tam giác ANP, BMP, CMN, ABC. Chứng minh rằng: $S_1.S_2.S_3 \leq \frac{1}{64} S^3$.	
		
	$\text{Kẻ } BH \perp AC, PK \perp AC \text{ (H, K } \in AC)$ $\text{Ta có } PK//BH \text{ nên } \frac{PK}{BH} = \frac{AP}{AB}$ $\text{Lại có } \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} PK \cdot AN}{\frac{1}{2} BH \cdot AC} = \frac{AP \cdot AN}{AB \cdot AC}$ $\text{Tương tự ta có: } \frac{S_2}{S} = \frac{BP \cdot BM}{AB \cdot BC}, \frac{S_3}{S} = \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot BC}$	0,25
	$\text{Suy ra } \frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = \frac{AP \cdot AN}{AB \cdot AC} \cdot \frac{BP \cdot BM}{AB \cdot BC} \cdot \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot BC} = \frac{AP \cdot BP}{AB^2} \cdot \frac{BM \cdot CM}{BC^2} \cdot \frac{CN \cdot AN}{AC^2}$ $\text{Lại có } AP \cdot BP = \frac{1}{4} \cdot \left[(AP + BP)^2 - (AP - BP)^2 \right] \leq \frac{1}{4} (AP + BP)^2 = \frac{1}{4} AB^2$ $\text{Suy ra } \frac{AP \cdot BP}{AB^2} \leq \frac{1}{4}, \text{ tương tự ta có: } \frac{AN \cdot CN}{AC^2} \leq \frac{1}{4}; \frac{BM \cdot CM}{BC^2} \leq \frac{1}{4}$	0,5
	$\text{Do đó } \frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = \frac{AP \cdot BP}{AB^2} \cdot \frac{BM \cdot CM}{BC^2} \cdot \frac{CN \cdot AN}{AC^2} \leq \frac{1}{64}$ $\text{Suy ra } S_1.S_2.S_3 \leq \frac{1}{64} S^3$	0,25

5 (1 điểm)	Cho các số a, b, c dương, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca}$	
	Ta có : $\frac{a}{b^3 + ab} = \frac{a}{b(b^2 + a)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{a + b^2} = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b^2}{a + b^2} \right) \geq \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}}.$ Tương tự : $\frac{b}{c^3 + bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{b}}; \quad \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{c}}.$	0,5
	Ta có : $\frac{1}{4a} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$ Vậy : $\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{9}{a + b + c} - 1 \right) = \frac{3}{2}.$	0,5

Ghi chú: HS làm cách khác so với đáp án ở mỗi câu nếu đúng vẫn cho điểm tối đa

-----Hết-----