

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+8}{x-4} - \sqrt{x} - 2 \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 16$.

2) Cho các số thực a, b không âm thỏa mãn điều kiện $2a+2b+ab=4$. Tính giá trị của biểu thức: $P = ab + 2\sqrt{a^2+b^2+8} - \sqrt{2(a^2+4)(b^2+4)}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{4}{4x^2-8x+7} + \frac{3}{4x^2-10x+7} = \frac{1}{x}$.

2) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=c^3-7c$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

2) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^3 = y^3 + 2(x^2 + y^2) + 2xy + 3$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC .

1) Chứng minh: $AE \cdot EB + AF \cdot FC = AH^2$ và $BC \cdot \cos^3 B = BE$.

2) Chứng minh: $BE \cdot \sqrt{CH} + CF \cdot \sqrt{BH} = AH \cdot \sqrt{BC}$.

3) Gọi M là trung điểm của BC . Từ A kẻ đường thẳng d vuông góc với AM tại A . Từ B kẻ tia Bx vuông góc với BC cắt đường thẳng d tại P . Chứng minh PC đi qua trung điểm của AH .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy+x+y}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+z}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+x}} \geq \sqrt{3}$$

----- Hết -----