

Đề chính thức
(Đề thi gồm có 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 10/08/2023

Câu 1: (5,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} - \frac{x - 1}{x} + \frac{3}{x + 1}$, với $x \neq -1, x \neq 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi x thỏa mãn $x^2 - x = 0$.

Câu 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $x + \frac{1}{x - 2} + \frac{3x - 6}{x^2 - 3x + 3} = 5$.

b) Nhân dịp ngày siêu khuyến mãi 08/08/2023, một siêu thị trên địa bàn thành phố Cao Lãnh đã khuyến mãi lô hàng tivi có giá niêm yết là 7 400 000 đồng/cái. Lần đầu siêu thị giảm 10% so với giá niêm yết thì bán được 10 cái tivi, lần sau siêu thị giảm thêm 5% nữa (so với giá giảm lần 1) thì bán thêm được 15 cái nữa. Sau khi bán hết 25 cái tivi thì siêu thị lời được 11 505 000 đồng. Hỏi giá vốn của một cái tivi là bao nhiêu tiền?

Câu 3: (5,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $75(4^{2023} + 4^{2022} + \dots + 4^2 + 5) + 25 = 25 \cdot 4^{2024}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4x - 4x^2 - 15$.

Câu 4: (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), có AH là đường cao.

Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C vẽ hình vuông $AHKE$.

a) Gọi P là giao điểm của AC và KE . Chứng minh: $AB = AP$.

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm BP và AQ . Chứng minh ba điểm H, I, E thẳng hàng.

c) Chứng minh: HE song song QK .

Câu 5: (2,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ có D là điểm di động trên cạnh AC , G là trọng tâm của $\triangle ABD$. Các đường thẳng CG, BD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng

$\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh AC .

Hết./.

Đề chính thức

(Hướng dẫn chấm này có 05 trang)

Câu 1: (5,0 điểm)

Nội dung yêu cầu	Điểm
Cho biểu thức $P = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} - \frac{x-1}{x} + \frac{3}{x+1}$, với $x \neq -1, x \neq 0$.	5,0
a) Rút gọn P	3,0
$P = \frac{2x^2 - 1}{x(x+1)} - \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{3x}{x(x+1)}$	1,0
$P = \frac{2x^2 - 1 - x^2 + 1 + 3x}{x(x+1)} = \frac{x^2 + 3x}{x(x+1)}$	0,5 – 0,5
$P = \frac{x(x+3)}{x(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$	0,5 – 0,5
b) Tính giá trị của biểu thức P khi x thỏa mãn $x^2 - x = 0$.	2,0
$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (KTM)} \\ x=1 \text{ (TM)} \end{cases}$	0,5 – 0,5
Thay $x=1$ vào P ta được: $P = \frac{1+3}{1+1} = 2$.	0,5 – 0,5

Câu 2: (5,0 điểm)

Nội dung yêu cầu	Điểm
a) Giải phương trình $x + \frac{1}{x-2} + \frac{3x-6}{x^2-3x+3} = 5$.	3,0
Điều kiện: $x \neq 2$	
$x + \frac{1}{x-2} + \frac{3x-6}{x^2-3x+3} = 5 \Leftrightarrow x-1 + \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x^2-3x+3} = 4$	0,5
$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+3}{x-2} + 3 \cdot \frac{x-2}{x^2-3x+3} = 4$	0,5
Đặt $t = \frac{x-2}{x^2-3x+3}$, ($t \neq 0$), ta được $\frac{1}{t} + 3t = 4 \Leftrightarrow \frac{1+3t^2}{t} = \frac{4t}{t} \Rightarrow 1+3t^2 = 4t$	0,5
$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (3t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \text{ (TM)} \\ t = 1 \text{ (TM)} \end{cases}$	0,5

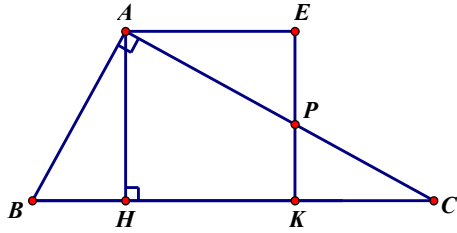
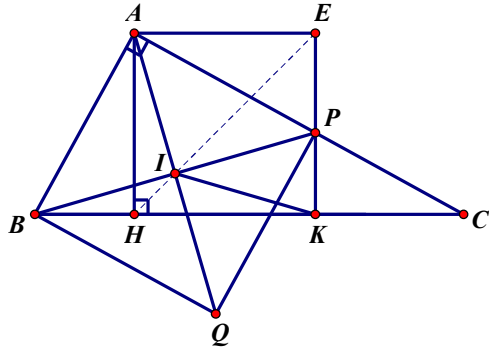
Với $t = \frac{1}{3}$ thì $\frac{x-2}{x^2-3x+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ (TM)	0,5
Với $t=1$ thì $\frac{x-2}{x^2-3x+3} = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 0$ (*) Vì $(x-2)^2 + 1 > 1 > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên PT (*) vô nghiệm	0,5
Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$.	
b) Nhân dịp ngày siêu khuyến mãi 08/08/2023, một siêu thị trên địa bàn thành phố Cao Lãnh đã khuyến mãi lô hàng tivi có giá niêm yết là 7 400 000 đồng/cái. Lần đầu siêu thị giảm 10% so với giá niêm yết thì bán được 10 cái tivi, lần sau siêu thị giảm thêm 5% nữa (so với giá giảm lần 1) thì bán thêm được 15 cái nữa. Sau khi bán hết 25 cái tivi thì siêu thị lời được 11 505 000 đồng. Hỏi giá vốn của một cái tivi là bao nhiêu tiền?	2,0
Giá bán tivi sau 2 lần giảm giá: $7\,400\,000 \cdot (100\% - 10\%) \cdot (100\% - 5\%) = 6\,327\,000$ (đồng)	1,0
Số tiền bán 25 cái tivi: $7\,400\,000 \cdot (100\% - 10\%) \cdot 10 + 6\,327\,000 \cdot 15 = 161\,505\,000$ (đồng)	0,5
Số tiền vốn 1 cái tivi là: $(161\,505\,000 - 11\,505\,000) : 25 = 6\,000\,000$ (đồng)	0,5

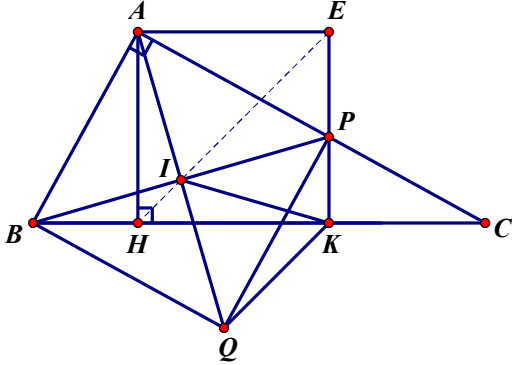
Câu 3: (5,0 điểm)

Nội dung yêu cầu	Điểm
a) Chứng minh rằng $75(4^{2023} + 4^{2022} + \dots + 4^2 + 5) + 25 = 25 \cdot 4^{2024}$.	2,0
$75(4^{2023} + 4^{2022} + \dots + 4^2 + 5) + 25$ $= 25 \cdot (4-1)(4^{2023} + 4^{2022} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$	0,5
$= 25 \cdot (4^{2024} + 4^{2023} + \dots + 4^2 + 4 - 4^{2023} - \dots - 4^2 - 4 - 1) + 25$	0,5
$= 25 \cdot (4^{2024} - 1) + 25 = 25 \cdot 4^{2024} - 25 + 25$	0,5
$= 25 \cdot 4^{2024}$.	0,5
b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4x - 4x^2 - 15$.	3,0
$A = 4x - 4x^2 - 15 = -(4x^2 - 4x + 15)$	0,5
$A = -\left[(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + 14\right]$	0,5
$A = -\left[(2x-1)^2 + 14\right] = -(2x-1)^2 - 14$	0,5

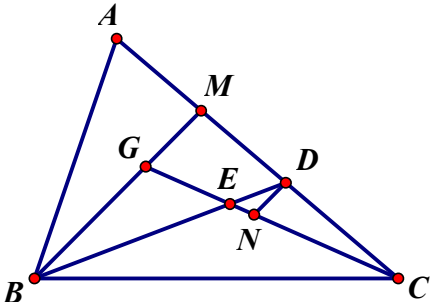
Vì $-(2x-1)^2 \leq 0$, với mọi x nên $-(2x-1)^2 - 14 \leq -14$, với mọi x Hay $A \leq -14$ với mọi x	0,5
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$	0,5
Vậy giá trị lớn nhất của A là -14 khi $x=\frac{1}{2}$.	0,5

Câu 4: (3,0 điểm)

Nội dung yêu cầu	Điểm
a) Gọi P là giao điểm của AC và KE . Chứng minh: $AB = AP$.	1,0
	
Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AEP$ có:	
$\widehat{AHB} = \widehat{AEP} = 90^\circ$	0,25
$AH = AE$ (vì $AHKE$ là hình vuông)	0,25
$\widehat{HAB} = \widehat{EAP}$ (cùng phụ với $\widehat{HAP}$)	0,25
Do đó $\triangle AHB = \triangle AEP$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = AP$ (2 cạnh tương ứng).	0,25
b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm BP và AQ . Chứng minh ba điểm H, I, E thẳng hàng.	1,0
	
Xét hình bình hành $APQB$ có I là giao điểm của AQ và BP $\Rightarrow I$ là trung điểm của AQ và BP Xét $\triangle ABP$ vuông tại A có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BP \Rightarrow IA = \frac{1}{2}BP$ Xét $\triangle BKP$ vuông tại K có KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $BP \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BP$ Do đó: $IA = IK$ $\Rightarrow I$ thuộc vào đường trung trực của đoạn thẳng AK (1)	0,25

Ta có: $HA = HK$ ($AHKE$ là hình vuông) $\Rightarrow H$ thuộc vào đường trung trực của đoạn thẳng AK (2)	0,25
Tương tự: $EA = EK$ ($AHKE$ là hình vuông) $\Rightarrow E$ thuộc vào đường trung trực của AK (2)	0,25
Từ (1), (2), (3) suy ra H, I, E cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng $AK \Rightarrow H, I, E$ thẳng hàng.	0,25
c) Chứng minh: HE song song QK .	1,0
	
Xét hình bình hành $APQB$ có $\widehat{BAP} = 90^\circ$ $\Rightarrow APQB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AQ = BP$	0,25
Theo câu b): $IK = \frac{1}{2}BP \Rightarrow IK = \frac{1}{2}AQ$ Xét $\triangle AKQ$ có KI là đường trung tuyến ứng với cạnh AQ và $IK = \frac{1}{2}AQ$ $\Rightarrow \triangle AKQ$ vuông tại $K \Rightarrow QK \perp AK$	0,5
Mặt khác $HE \perp AK$ ($AHKE$ là hình vuông) $\Rightarrow HE$ song song QK .	0,25

Câu 5: (2,0 điểm)

Nội dung yêu cầu	Điểm
Cho $\triangle ABC$ có D là điểm di động trên cạnh AC , G là trọng tâm của $\triangle ABD$. Các đường thẳng CG, BD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh AC .	2,0
	
Gọi M là giao điểm của BG và AD Vì G là trọng tâm của $\triangle ABD$ nên M là trung điểm của AD $\Rightarrow AM = DM$	0,5

Ta có $CA + CD = CM + AM + CM - DM = 2CM$ (Vì $AM = DM$) $\Rightarrow CA = 2CM - CD$	
Vẽ DN song song BM ($N \in CG$) Vì G là trọng tâm của $\triangle ABD$ nên $GB = 2GM$ Xét $\triangle EDN$ có $DN \parallel BG \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{BG}{DN}$ (Hệ quả của ĐL Ta-lét) $\Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{2GM}{DN}$	0,5
Xét $\triangle CGM$ có $DN \parallel GM \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{GM}{DN}$ (Hệ quả của ĐL Ta-lét)	0,5
Khi đó: $\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD} = \frac{2GM}{DN} - \frac{2CM - CD}{CD} = 2 \cdot \frac{GM}{DN} - 2 \cdot \frac{CM}{CD} + 1$ $\Leftrightarrow \frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD} = 2 \cdot \frac{GM}{DN} - 2 \cdot \frac{GM}{DN} + 1 = 1$ (không đổi) Vậy $\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh AC.	0,5

Lưu ý: Học sinh giải cách khác mà hợp lý vẫn chấm điểm. Câu 4 và câu 5 nếu HS không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không chấm.

Hết./.