

Bài 1: (6,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $|x-1| = \sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{19-\sqrt{192}}$

c) Tìm x để $Q = \frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (3 điểm)

a, Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ thì $n^4 - n + 2$ không phải là số chính phương.

b,) Giải phương trình nghiệm nguyên: $3(y^2 - 8x) = 3 - 4x^2$

Bài 3: (2 điểm) Giải phương trình: $(\sqrt{x+1}+1)(5-x) = 2x$

Bài 4: (7, 0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A; $BC = 2a$ (cm). Đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$

b) Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với AC, qua điểm C vẽ đường thẳng song song với AB, hai đường thẳng này cắt nhau tại M. Gọi N và K lần lượt là trung điểm của BM và HC. Chứng minh AK vuông góc với KN .

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

Câu 5 (2,0 điểm)

: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2015}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2015}{2}}$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4,5 đ)	a 3,0 đ	ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$. Rút gọn: $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}(1-x)-(1-x^2)}{\sqrt{x}(1-x)}$ $= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1-x}{\sqrt{x}}$ $= \frac{x+1+x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1-x}{\sqrt{x}}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ Vậy $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$	0,5 0,75 0,5 0,5 0,5 0,25
	b 2,0 đ	Ta có: $x-1 = \sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{19-\sqrt{192}}$ $ x-1 = 3.$ $\Leftrightarrow x-1 = 3$ hoặc $x-1 = -3$ $\Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = -2$. Vì $x = 4$ thỏa mãn đkxđ nên ta có: Giá trị của biểu thức P là: $P = \frac{(\sqrt{4}+1)^2}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	c 1,0 đ	Với ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$. Ta có: $Q = \frac{6}{P} = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} > 0$ mọi x thuộc đkxđ. Mặt khác: $Q - 3 = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} - 3 = \frac{6\sqrt{x}-3(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}$ $= \frac{6\sqrt{x}-3(x+2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-3(x+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} < 0$ mọi x thuộc đkxđ. Nên: $Q < 3$ mọi x thuộc đkxđ. Vậy: $0 < Q < 3$ với mọi $x > 0; x \neq 1$. Vì Q nhận giá trị nguyên nên $Q = 1$ hoặc $Q = 2$. +) $Q = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 3$	0,5

		$\Leftrightarrow x = (2 \pm \sqrt{3})^2 \text{ (t/m đkxd)}$ +) $Q = 2 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0$. PT vô nghiệm. Vậy với $x = (2 \pm \sqrt{3})^2$ thì Q nhận giá trị nguyên.	0,5
Bài 2 (3,0 đ)	a 1, 5đ	Đặt $M = n^4 - n + 2$ Ta có: $M = n^4 - (n - 2) < (n^2)^2$ (vì $n > 2$ nên $n-2 > 0$) Mặt khác: $A = n^4 - 2n^2 + 1 + 2n^2 - n + 1 = (n^2 - 1)^2 + (2n^2 - n + 1)$ $\Rightarrow M > (n^2 - 1)^2$ (vì $2n^2 - n + 1 = 2(n - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} > 0$) $\Rightarrow (n^2 - 1)^2 < M < (n^2)^2$. Vậy M không là số chính phương.	0,5 0,5 0,5
	b 1, 5đ	$3(y^2 - 8x) = 3 - 4x^2$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 - 36 = 3 - 3y^2$ $\Leftrightarrow 4(x - 3)^2 = 3(13 - y^2) \text{ (1)}$ Ta thấy $3(13 - y^2) : 4$, suy ra: $(13 - y^2) : 2 \Rightarrow y$ lẻ. Ta lại có: $7 - y^2 \geq 0$ nên suy ra $y^2 = 1$; $y^2 = 9$ Khi đó (1) có dạng: $4(x-3)^2 = 36$ hoặc $4(x-3)^2 = 12$ (Loại) $\Rightarrow x - 3 = \pm 3$ do đó $x = 6$ hoặc $x = 0$. Vậy các cặp $(x,y) : (6;1), (6;-1), (0;1), (0;-1)$ thỏa mãn (1) là nghiệm của PT đã cho.	0,5 0,5 0,5
Bài 3 (2,0 đ)		ĐK: $x \geq -1$. Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của PT (1) . Với $x \neq 0$ ta nhân 2 vế của PT (1) với $(\sqrt{x+1}-1)$ ta có: $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(5-x) = 2x(\sqrt{x+1}-1)$ $\Leftrightarrow (x+1-1)(5-x) = 2x(\sqrt{x+1}-1)$ $\Leftrightarrow x(5-x) = 2x(\sqrt{x+1}-1)$ $\Leftrightarrow (5-x) = 2(\sqrt{x+1}-1)$ (do $x \neq 0$) $\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x+1} - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 1)^2 = 9$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = 3$ (do $\sqrt{x+1} + 1 > 0$ với mọi $x \geq -1$.) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$ $\Leftrightarrow x + 1 = 4$ $\Leftrightarrow x = 3$ (t/m đk) Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 3$.	0,5 0,5 0,5

	b 2, 0đ	b, Gọi O là giao điểm của AH và ED. Chứng minh được OK là đường trung bình của tam giác AHC Chứng minh được tứ giác BNKO là hình bình hành để suy ra BO song song với NK - Chứng minh được O là trực tâm của tam giác ABK - Chứng minh được BO vuông góc với AK để suy ra NK vuông góc với AK <u>C, Tìm giá trị lớn nhất của:</u> diện tích tứ giác ADHE. ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM ta có: $AM = \frac{1}{2}BC = a$ (cm) Xét ΔABH vuông tại H có: $AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$ Tương tự: $AD = \frac{AH^2}{AC}$ Do đó: $S_{ADHE} = AE.AD = \frac{AH^2}{AB} \cdot \frac{AH^2}{AC} = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{AM^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AH \equiv AM \Leftrightarrow H \equiv M$ $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A. Vậy $\max S_{ADHE} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 5 (1,0 đ)	2, 0đ	Ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$. Suy ra: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$ Đặt $x = \sqrt{b^2 + c^2}$, $y = \sqrt{c^2 + a^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, suy ra $VT \geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z}$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right]$ $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right]$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z)]$ Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2015}{2}}$	0,5 0,5 0,5
Thí sinh giải theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.			

