

Bài 1: (7.5 điểm)

1. Rút gọn $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

2. a) Cho $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

b) Giải phương trình 1. $(3x-1)\sqrt{x^2+1} = 3x^2 - x + 1$

2. $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1$

c) Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 + 6 < xy + 3y + 4z$

Bài 2: (5.0 điểm)

a) Cho đa thức $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ có 5 nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$. Đặt $Q(x) = x^2 - 2$. Tính tích sau: $T = Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $7p + q$ và $pq + 11$ là các số nguyên tố.

c) Cho x, y, z là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $x^2 + y^2 = z^2$.

Chứng minh rằng xy chia hết cho 12

Bài 3: (1,5 điểm) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ Chứng minh:

$$A = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2a^2b} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 4 (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có O là giao điểm các đường trung trực của tam giác. Gọi I là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên các cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng:

a. $\sin(\angle OAC + \angle OCB) = \cos \angle OAB$

b. $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$

c. $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}$ (Đặt $R = OA$)