PHÒNG GD&ĐT TP VINH **KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

TRƯỜNG THCS ĐẶNG THAI MAI

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: ***150 phút***

Bài 1 ***(4,0 điểm).***

a) Cho biểu thức $A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le \frac{1}{4}$.

b) Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn $x-2y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}.$$

Bài 2 ***(6,0 điểm).*** a) Giải phương trình $3x^2+6=9x-2x\sqrt{x-2}$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1}+(x+3)\sqrt{x+4}=x^2+x$.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+7y^2=61+4x$.

d) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $a>b$ và $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a,b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 3 ***(2,0 điểm).*** a) Cho $a,b\ge 0, ab=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\le 2(a+b).$$

b) Cho ba số không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc+\frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

Bài 4 ***(7,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Gọi E,F là các điểm lần lượt thuộc các tia HC,HB sao cho $\angle EAB=\angle FAC=90^o$.

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{FB}{CE}$.

b) Gọi P thuộc đoạn thẳng AH ($P\ne A;P\ne H$). Trên tia đối của tia PE lấy điểm M sao cho $BM=BA$. Trên tia đối của tia PF lấy N sao cho $CN=CA$. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với PF cắt đường thẳng AH tại K. Chứng minh $BP\perp KE$.

c) Các đường thẳng BM,CN cắt nhau tại S. Chứng minh $SM=SN$.

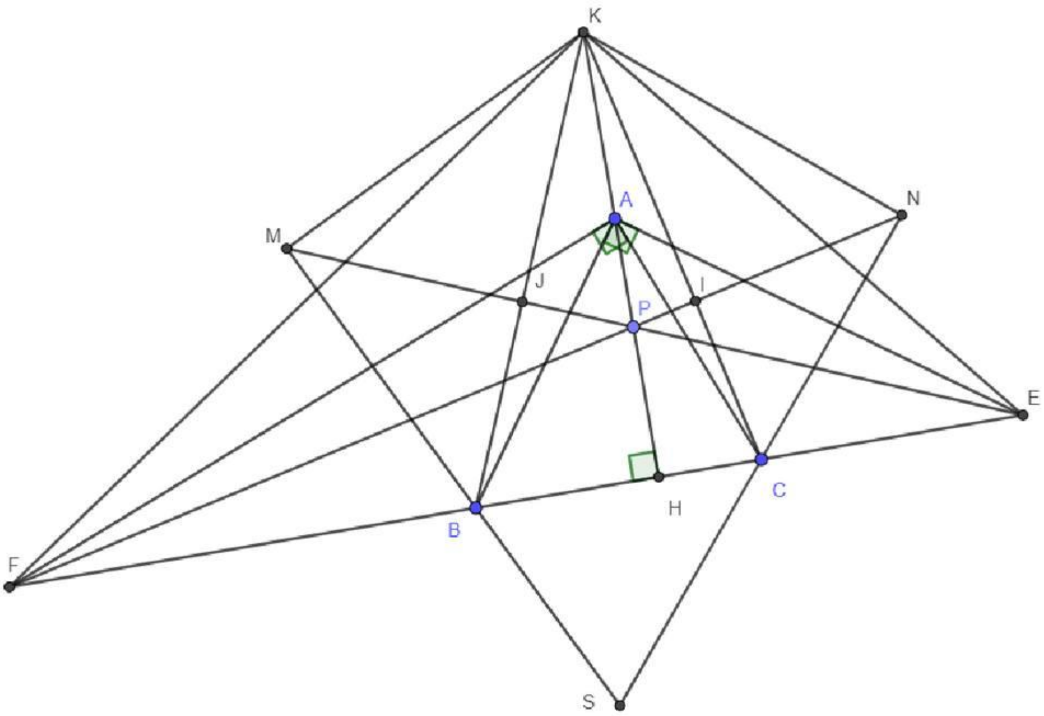
Bài 5 ***(1,0 điểm).*** Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Hết

ĐÁP ÁN

Bài	Câu	Đáp án	Điểm
1	a	Rút gọn A=2x	1
		Thay vào $B=1-\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$ $=1-\left\|2\sqrt{x}-1\right\|$ $=1-\left(1-2\sqrt{x}\right)$ $=2\sqrt{x}$	0,5 0,5
	b)	Ta có $2y=x+z$ $\Leftrightarrow (x+z)+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2y+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$	0,5 0,5 0,5 0,5
2	a	ĐKXĐ: $x\ge 2$.	0,25
		Phương trình đã cho tương đương với $4x^2-8x+4=x^2-2x\sqrt{x-2}+x-2$ $\Leftrightarrow (2x-2)^2=\left(x-\sqrt{x-2}\right)^2$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=x-\sqrt{x-2}\\2x-2=\sqrt{x-2}-x\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=-\sqrt{x-2}(1)\\3x-2=\sqrt{x-2}(2)\end{array}\right.$	0,25
		Với $x\ge 2, VT(1)\ge 0\ge VP(1)$ Để (1) xảy ra thì $x=2$.	0,5
		Phương trình (2) tương đương với $3(x-2)-\sqrt{x-2}+4=0\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+5\sqrt{x-2}+1=0$ (vô nghiệm vì vế trái dương với mọi $x\ge 2$.	0,5
		Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{2\}$.	
	b	Điều kiện $x\ge 1$.	0,25
		$(1)\Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x-1}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{x+4}-3\right)=x^2-4x-5$	0,5

		$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3}=(x-5)(x+1)$ $\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-x-1\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}=x+1\ (2)\end{array}\right.$	
		Ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}<\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}+2}\le\dfrac{x-1}{2}$; $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}\le\dfrac{x+3}{3}$. Suy ra $VT(2)<\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{5x+3}{6}<\dfrac{6x+6}{6}=x+1=VP(2)$. Do đó (2) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{5\}$.	0,25
	c	$2x^2+7y^2=61+4x$ $\Leftrightarrow 2(x-1)^2+7y^2=63$ $\Rightarrow 7y^2\le 63 \Rightarrow y^2\le 9$ $\Rightarrow y^2\in\{0;1;4;9\}$	0,5 0,5
		Mà 65 lẻ, $2(x-1)^2$ chẵn nên $\Rightarrow y^2\in\{1;9\}$. TH1: $y^2=1\Rightarrow (x-1)^2=28$ (loại). TH2: $y^2=9\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow y=\pm 3; x=1$	0,25 0,25 0,25
		Vậy $(x;y)\in\{(1;3);(1;-3)\}$	0,25
	d	$a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow (a-b-1)^2=4a\Leftrightarrow a=\left(\dfrac{a-b-1}{2}\right)^2$ $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow b=\left(\dfrac{a-b+1}{2}\right)^2$	0,5
		Suy ra a, b đều chính phương. Lại có $\dfrac{a-b+1}{2}-\dfrac{a-b-1}{2}=1$ nên a,b là hai số chính phương liên tiếp.	0,5
3	a	Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt{2(a^2+1)}=\sqrt{2(a^2+ab)}=\sqrt{2(a+b)a}=\sqrt{2\text{a}(a+b)}\le\dfrac{2\text{a}+a+b}{2}=\dfrac{3\text{a}}{2}+\dfrac{b}{2}$. Tương tự, ta có $\sqrt{2(b^2+1)}\le\dfrac{a}{2}+\dfrac{3b}{2}$. Do đó $\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\le 2\text{a}+2b=2(a+b)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.	0,5 0,25 0,25

	b	Ta có $\lvert a-b\rvert \le \lvert a\rvert+\lvert b\rvert=a+b$. Tương tự $\lvert b-c\rvert \le \lvert b\rvert+\lvert c\rvert=b+c;\lvert c-a\rvert \le \lvert c\rvert+\lvert a\rvert=c+a$.	0,25
		Suy ra $2(a+b+c)\ge \lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert+\lvert c-a\rvert \ge 3\sqrt[3]{\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert}$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $\lvert a-b\rvert,\lvert b-c\rvert,\lvert c-a\rvert$). (1)	0,25
		Lại có $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ $\ge 3\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$). (2) Nhân theo vế (1) và (2) suy ra $4\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)\ge 9\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert \Rightarrow a^3+b^3+c^3$ $\ge 3abc+\dfrac{9}{4}\lvert(a-b)(b-c)(c-a)\rvert$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c	0,25 0,25
4			
	a	a) Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: $HB.HE=AH^2$ Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: $HC.HF=AH^2$	0,5 0,5
		Từ đây ta suy ra $HB.HE=HC.HF$ $\Rightarrow \dfrac{HB}{HC}=\dfrac{HF}{HE}=\dfrac{HF-HB}{HE-HC}=\dfrac{FB}{CE}$	1 1

	b	Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN. Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm. Khi đó $\Delta HPF \backsim \Delta HCK\left(g.g\right) \Rightarrow HP.HK = HF.HC$	0,5
		Lại có $HF.HC = HE.HB \Rightarrow HP.HK = HE.HB \Rightarrow \Delta HBK \backsim \Delta HPE\left(c.g.c\right)$. $\Rightarrow \angle KBH = \angle HPE \Rightarrow \angle JKP + \angle KPJ = \angle JKP + \angle KBH = 90^o \Rightarrow EJ \perp BK$ Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.	0,5 0,5
		Do đó $BP \perp KE$	0,5
	c	Ta có $BM = BA \Rightarrow BM^2 = BA^2 = BH.BC = BJ.BK \Rightarrow BM \perp MK$	1,0
		$\Rightarrow KM^2 = KJ.KB = KI.KC = KN^2$	0,5
		$\Rightarrow KS^2 - KM^2 = KS^2 - KN^2 \Rightarrow MS = NS$	0,5
5		Bài 5- Theo nguyên lý Đi rích lê, 5=2.2+1 nên trong năm số có ba số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ. Vì 3=2.1+1 nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ. Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	0,5 0,5