

Câu 1 (5 điểm).

1. Cho a, b, c là các số thực có tổng bằng 0. Chứng minh rằng

$$(a^2 - bc)^2 = (b^2 - ca)(c^2 - ab).$$

2. Biết rằng $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = \frac{2023}{2024}$, tính giá trị của biểu thức $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$.

Câu 2 (3 điểm).

1. Chứng minh rằng nếu số nguyên n không chia hết cho 3 thì $n^6 - 1$ chia hết cho 9.

2. Cho m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng $m^3 + n^3 + 4$ không thể là lập phương của một số nguyên.

Câu 3 (4 điểm).

1. Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y = 4$ và $2z^2 - 4\sqrt{3}z = xy - 10$.

2. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $(a - b)(b - 3) \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a + \frac{b^3}{a^3} \geq b + 1.$$

Câu 4 (6 điểm).

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là một điểm bất kỳ trên đường chéo AC . Đường thẳng qua E và song song với AB cắt BC tại F . Gọi G là điểm đối xứng với C qua F , chứng minh rằng EG song song với đường chéo BD .

2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AM là đường trung tuyến ($M \in BC$). Đường thẳng qua B và vuông góc với phân giác trong của góc $\widehat{MAC}$ cắt AC, AM lần lượt tại D, E . Chứng minh $CD = 2ME$.

Câu 5 (2 điểm). Một hình tròn được chia thành 6 hình quạt tròn. Tom viết lần lượt lên 6 hình quạt đó các số 2, 0, 2, 3, 0, 9 theo chiều kim đồng hồ, mỗi hình quạt được viết 1 số. Jerry có thể cộng thêm 1 đơn vị cho mỗi số ở 2 hình quạt tròn kề nhau bất kỳ. Hãy xác định xem Jerry có thể cộng thêm như vậy để được các số ở 6 hình quạt tròn bằng nhau hay không.

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm