

Bài 1 (3,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} \left(2 - \frac{10}{\sqrt{x}+5} \right) + \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-8\sqrt{x}-16}{x+3\sqrt{x}+2} \right) (x \geq 0)$.

Rút gọn biểu thức A và tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

b) Cho $2a = by + cz$; $2b = ax + cz$; $2c = ax + by$, $x, y, z \neq -2$ và $a + b + c \neq 0$, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2}$.

Bài 2 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

b) Cho a và b không âm thỏa mãn $2a + b \leq 2$. Chứng minh: $\frac{5+2a}{3+2a} + \frac{1-b}{1+b} \geq \frac{4}{3}$.

Bài 3 (1,5 điểm)

Một bể nước có hai vòi chảy vào và ở đáy bể có một vòi thứ III để tháo nước ra. Vòi thứ II chảy một mình trong 8 giờ thì đầy bể. Nếu bể đầy, mở vòi thứ III sau 24 giờ thì bể cạn. Lúc đầu bể cạn, người ta mở vòi thứ I và vòi thứ III, 2 giờ sau mở tiếp vòi thứ II thì sau 3 giờ nữa bể đầy. Hỏi vòi thứ I chảy một mình sau bao lâu sẽ đầy bể?

Bài 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC và AC. AM cắt HN tại G. Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 \widehat{BAC}$ và $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 \widehat{BAC} - \cos^2 \widehat{ABC} - \cos^2 \widehat{ACB}$.

b) Chứng minh $\frac{BH}{KN} = \frac{BA}{KM}$.

c) Tính $\sqrt{\frac{GA^5 + GB^5 + GH^5}{GM^5 + GK^5 + GN^5}}$.

----- Hết -----