

Bài 1: (4,0 điểm)

- a) Tìm hai số nguyên tố, sao cho tổng và hiệu của chúng đều là số nguyên tố.
b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y = 12$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Cho $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$.

b) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 20x + 28} = 3x^2 - 15x + 20$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{3(x + \sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0; x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị x nguyên để A là một số nguyên.

b) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy^2$.

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh CD và N là một điểm trên đường chéo AC sao cho $\widehat{BNM} = 90^\circ$. Gọi F là điểm đối xứng của A qua N . Chứng minh FB vuông góc với AC .

2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ trung điểm E của cạnh AC kẻ EF vuông góc với BC ($F \in BC$). AF và BE cắt nhau tại O .

a) Chứng minh $AF = BE \cdot \cos C$.

b) Biết $BC = 10\text{cm}$, $\sin C = 0,6$. Tính diện tích tứ giác $ABFE$.

c) Tính $\sin \widehat{AOB}$.

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2023$.

Chứng minh $\frac{a}{a + \sqrt{2023a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2023b + ac}} + \frac{c}{c + \sqrt{2023c + ab}} \leq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.