

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN – LỚP : 9
Thời gian làm bài : 150 phút
(Đề thi gồm có 01 trang)

Bài 1 (3,0 điểm).

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+5}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

2. Cho $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$. Chứng minh x là một số hữu tỉ.

Bài 2 (4,0 điểm).

1. Giải phương trình : $x^3 - x^2 + 2x + 5\sqrt{x+3} - 12 = 0$.

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + xy^2 + 2x - xy = y^3 + 2y \\ \frac{(y+2)\sqrt{x+1}}{2x-1} = 4x^2 - 4y + 2 \end{cases}$$

Bài 3 (3,0 điểm).

1. Xét các số thực dương a, b thay đổi thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{7}{4}a + \frac{5}{4}b + \frac{4}{a} + \frac{2}{b}.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh : $\frac{a^3}{b^2+c+1} + \frac{b^3}{c^2+a+1} + \frac{c^3}{a^2+b+1} \geq 1$.

Bài 4. (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường cao AD của tam giác ABC và đường kính AK của đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và M là trung điểm đoạn thẳng BC . Tia MH cắt (O) tại E , tia ED cắt (O) tại S .

1. Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng và tứ giác $AMDE$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\frac{AB}{AC} = \frac{SB}{SC}$.

3. Tia SM cắt (O) tại T . Chứng minh tứ giác $ABCT$ là hình thang cân.

4. Chứng minh các đường thẳng DT, AM, HO đồng quy.

Bài 5 (3,0 điểm).

1. Tìm tất cả số nguyên x, y sao cho $2x^3 + 4x^2 - x(2y+1) + 4 - y = 0$.

2. Cho 2024 phân số gồm : $\frac{1}{2024}; \frac{2}{2024}; \frac{3}{2024}; \dots; \frac{2023}{2024}; \frac{2024}{2024}$. Mỗi lần thực hiện ta xoá đi hai số $a; b$ bất kỳ trong dãy trên và thay vào đó số $a+b-4ab$. Cứ làm như vậy đến khi còn duy nhất một số. Hãy tìm số đó.