

Bài 1. (5,0 điểm)

a) Cho $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ Tính giá trị của $A = \frac{2023x^2 - 4048x + 2026}{x^2 - 2x + 1}$

b) Cho a, b, c là các số nguyên thoả mãn: $a + b + c = c^3 - 2023c$. Chứng minh rằng $M = a^3 + b^3 + c^3 : 6$

c) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình: $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$ thì giá trị của: $P = \frac{3ab}{4a^2 - b^2}$ là một số nguyên tố.

b) Giải phương trình: $x^2 + 2x = 4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}$.

Bài 3. (3,0 điểm)

a) Cho x, y là hai số dương thoả mãn: $(x + y)^2 \geq 6 + 2xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^4 - 2x^2 + y^2 + \frac{6}{x^2} + \frac{8}{y^2}$

b) Cho $M = (x^2 + 2yz - 1)(y^2 + 2xz - 1)(1 - z^2 - 2xy)$.

Trong đó x, y, z là các số hữu tỉ thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 4. (6 điểm). Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH , I là trung điểm AC , F là hình chiếu của I trên BC . Kẻ tia Cx vuông góc AC cắt IF tại E .

a) Cho $AB = 20\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$. Tính độ dài AH và AC .

b) Chứng minh rằng: $HA \cdot HI = HB \cdot HE$

c) Chứng minh AE vuông góc với BI .

Bài 5. (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq a + b + c$$

----- Hết -----

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm.