

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (3,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{3x}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$, với $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các số nguyên x để $A + 3$ có giá trị là số nguyên tố.

Câu 2: (3,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - mx - 2 = 0$ (*), với x là ẩn số.

a) Chứng minh phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Gọi hai nghiệm đó là x_1, x_2 . Tìm giá trị của m để $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 6$.

b) Đặt $B = x_1^4 + x_2^4$, chứng minh khi m là số nguyên thì B có giá trị nguyên và $B + 1$ chia hết cho 3.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3x - 8} + 3\sqrt{5x - 6} = 2(2x - 1)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x = 2y^2 + y \\ 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu 4: (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình

$$(xy + 1)^2 = x^2 + 4y^2 + 24.$$

b) Gọi a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b + ab = 3$. Chứng minh

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \geq 1.$$

Câu 5: (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , M là trung điểm BC . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại K , AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P .

a) Chứng minh $KP \cdot KA = KM \cdot KO$.

b) Chứng minh $\triangle PKM$ đồng dạng $\triangle OAM$.

c) Chứng minh $\widehat{BAK} = \widehat{MAC}$.

d) Gọi BE, CF là các đường cao của tam giác ABC , H là giao điểm của AK với BC , G là giao điểm của AM với EF . Chứng minh GH vuông góc với BC .

———— HẾT ————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.