

Bài 1: (5 điểm)

1) Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{4-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+3}{x-7\sqrt{x}+12})$ với $x \geq 0; x \neq 16; x \neq 9$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

2) Tính giá trị của biểu thức P, biết

$$P = 4x^{2023} + 5x^{2024} + 2022 \text{ với } x = \sqrt{10 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{3} + 5 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}} - \sqrt{3}$$

Bài 2: (3 điểm)

1) Cho a, b là các số nguyên, chứng minh rằng:

$$Q = a^4b - a^2b + ab^2 - ab^4 \text{ chia hết cho 6}$$

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn:

$$y^2 = x(x+2)(x+4)(x+6) + 15$$

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và bất phương trình sau:

1) $\frac{x+2}{2021} + \frac{2x+6}{4040} > \frac{x+1}{2022} + \frac{2x-1}{4047}$

2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}} = 2$

Bài 4: (6 điểm)

1) Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{ABC} = \alpha$. Gọi I là trung điểm của BC. Trên cạnh AB, AC lấy M, N sao cho $\widehat{MIN} = \alpha$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác BMI đồng dạng với tam giác CIN. Từ đó suy ra BM.CN không đổi

b) NI là tia phân giác của $\widehat{MNC}$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M nằm giữa B và C. Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB

a) Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

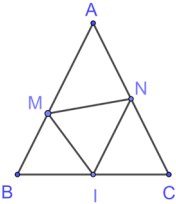
b) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để với mọi vị trí của M nằm giữa B và C thì các hình chữ nhật ADME có chu vi bằng nhau.

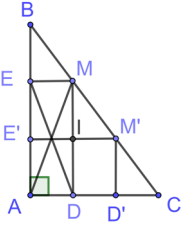
Bài 5: (2 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A, với

$$A = \frac{(x+1)^2}{y+z+2} + \frac{(y+1)^2}{x+z+2} + \frac{(z+1)^2}{x+y+2}$$

1)	$Q = a^4b - a^2b + ab^2 - ab^4$ $= (a^4b - a^2b) - (ab^4 - ab^2)$ $= a^2b(a^2 - 1) - ab^2(b^2 - 1)$ $= aba(a-1)(a+1) - abb(b-1)(b+1)$ Ta có: $a; (a-1); (a+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp. $\Rightarrow a(a-1)(a+1) \vdots 2; a(a-1)(a+1) \vdots 3 \text{ mà } (2,3) = 1$ $\Rightarrow a(a-1)(a+1) \vdots 6$ Tương tự: $b(b-1)(b+1) \vdots 6 \Rightarrow Q \vdots 6$	0,5 1,0												
2)	$y^2 = x(x+2)(x+4)(x+6) + 15$ $= (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 15$ Đặt $x^2 + 6x + 4 = t$ khi đó $y^2 = (t-4)(t+4) + 15$ $y^2 = t^2 - 1 \Leftrightarrow (y-t)(y+t) = -1$ Ta có bảng sau: <table border="1"> <tr> <td>$y-t$</td><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>$y+t$</td><td>1</td><td>-1</td></tr> <tr> <td>y</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>t</td><td>1</td><td>-1</td></tr> </table> + $x^2 + 6x + 4 = 1 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 6$ không có $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn + $x^2 + 6x + 4 = -1$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-5 \end{cases}$ Vậy $(x; y) \in \{(-1; 0); (-5; 0)\}$	$y-t$	-1	1	$y+t$	1	-1	y	0	0	t	1	-1	0,5 1,0
$y-t$	-1	1												
$y+t$	1	-1												
y	0	0												
t	1	-1												
Bài 3														
1)	$\frac{x+2}{2021} + \frac{2x+6}{4040} > \frac{x+1}{2022} + \frac{2x-1}{4047}$ $\frac{x+2}{2021} + 1 + \frac{2x+6}{4040} + 1 > \frac{x+1}{2022} + 1 + \frac{2x-1}{4047} + 1$													

	$\frac{x+2023}{2021} + \frac{2x+4046}{4040} > \frac{x+2023}{2022} + \frac{2x+4046}{4047}$ $\Leftrightarrow (x+2023)\left(\frac{1}{2021} + \frac{2}{4040} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{4047}\right) > 0$ Vì $\frac{1}{2021} + \frac{2}{4040} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{4047} > 0 \Rightarrow x+2023 > 0 \Rightarrow x > -2023$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $x > -2023$	1,0 1,0
2)	ĐK: $x \geq 4$ $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}} = 2$ $\sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}+1)^2} = 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 + \sqrt{x-4}+1 = 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 = 1 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-4}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5$ Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là: $4 \leq x \leq 5$	1,0 1,0
Bài 4		
1		0,25
a)	Tam giác BMI có $\widehat{BMI} + \widehat{MIB} = 180^\circ - \alpha$. mà $\widehat{MIB} + \widehat{NIC} = 180^\circ - \alpha$ Suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{NIC}$ Xét tam giác BMI và tam giác CIN có $\widehat{BMI} = \widehat{NIC}$; $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle BMI \sim \triangle CIN$ $\Rightarrow \frac{BM}{CI} = \frac{BI}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = BI \cdot CI = \frac{BC^2}{4}$ không đổi	0,5 1,0 0,5
b)	Xét tam giác MNI và tam giác INC có $\widehat{MIN} = \widehat{C} = \alpha$; mà $\triangle BMI \sim \triangle CIN \Rightarrow \frac{BI}{CN} = \frac{MI}{IN} \Rightarrow \frac{CI}{CN} = \frac{MI}{IN}$ $\Rightarrow \triangle MNI \sim \triangle INC$ $\Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{INC} \Rightarrow NI$ là phân giác của góc MNC.	1,0 0,75

2)		0,25
a)	Do D, E là hình chiếu của M trên AC, AB. Suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{MEA} = 90^\circ$ mà $\widehat{EAD} = 90^\circ$ Suy ra tứ giác AEMD là hình chữ nhật. Suy ra $AM = DE$ Suy ra DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất, khi đó $AM \perp BC$ Kết luận:	0,75
b)	Lấy M' bất kì thuộc BC ($M' \neq M$). Để chu vi hình chữ nhật AEMD bằng chu vi hình chữ nhật $AE'M'D'$ $\Leftrightarrow MD + EM = M'D' + E'M'$ $\Leftrightarrow MI + ID + EM = M'D' + E'I + IM'$ mà $ID = M'D'$; $E'I = EM \Leftrightarrow MI = IM' \Leftrightarrow \triangle MIM'$ cân $\Leftrightarrow \widehat{IMM'} = \widehat{MM'I}$ Lại có $\widehat{IMM'} = \widehat{B}$; $\widehat{MM'I} = \widehat{C}$ $\Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A Kết luận:	1,0
Bài 5	Đặt $x+1=a; y+1=b; z+1=c \Rightarrow a+b+c=6; a, b, c > 0$ $A = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2 \cdot \frac{a}{2} = a$ Tương tự: $\frac{b^2}{a+c} + \frac{a+c}{4} \geq 2 \cdot \frac{b}{2} = b$; $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2 \cdot \frac{c}{2} = c$ $\Rightarrow A \geq a+b+c - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = 3$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a = b+c \\ 2b = a+c \\ 2c = a+b \\ a+b+c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3 $\Leftrightarrow a = b = c = 2$ $\Leftrightarrow x = y = z = 1$	0,25 1,5 0,25

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

