

TRƯỜNG THCS AN TRUNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG LỚP 8 NĂM HỌC 2022 -2023

Môn Toán 8 – Thời gian 120 phút

Câu 1: (6 điểm) a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x^2 - xy + x - 3y = 1$.

b) Tìm x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $4x + 1 \vdots y$ và $4y + 1 \vdots x$.

c) Xác định đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia hết cho $2x - 1$, chia cho $x - 2$ thì dư 6, chia cho $2x^2 - 5x + 2$ được thương là $x + 2$ và còn dư.

Câu 2 (4 điểm) 1. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

Câu 3 (4 điểm) a) Giải phương trình sau: $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

b) Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$$

Câu 4 (6 điểm) 1. Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$.

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F.

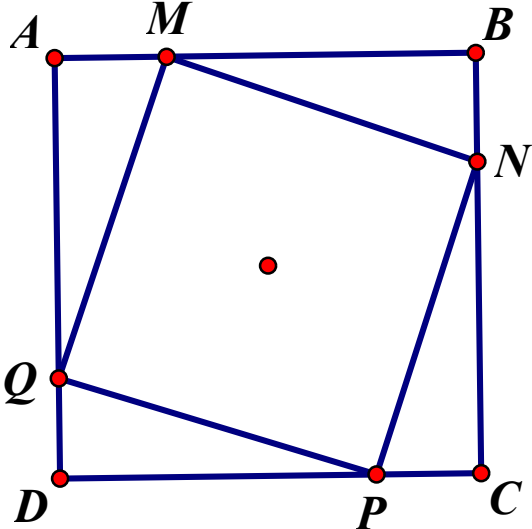
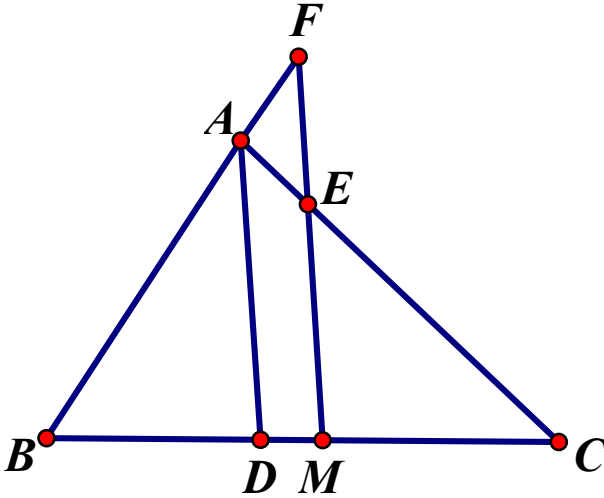
Chứng minh $CE = BF$.

.....**Hết**.....

Hướng dẫn chấm

Câu	Nội dung	Điểm
1	Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn a) $x^2 - xy + x - 3y = 1$ Ta có $y(x+3) = x^2 + x - 1$ Nếu $x = -3$ Thì VT = 0 còn VP khác 0. Nên $x \neq -3$ suy ra $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 3} = x - 2 + \frac{5}{x + 3}$ x, y là số nguyên nên $5 : x + 3$ $x + 3 \in \{1; -1; 5; -5\}$ Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-2; 1), (-4; -11), (2; 1); (-8; -11)$	0,5 0,5 0,5 0,5
	b) Tìm x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $4x + 1 : y$ và $4y + 1 : x$ Đặt $4x + 1 = ky$ (k là số tự nhiên) Giả sử $2 \leq x \leq y$ Ta có $ky = 4x + 1 < 4y + y = 5y$ suy ra $k < 5$ mà k là số lẻ nên $k = 1, k = 3$. Với $k = 1$ suy ra $y = 4x + 1$ suy ra $4y + 1 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 1 : x \Rightarrow 5 : x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 21$ Với $k = 3$ suy ra $3y = 4x + 1$ Từ $4y + 1 : x \Rightarrow 12y + 3 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 3 : x \Rightarrow 7 : x \Rightarrow x = 7, y = \frac{29}{3}$ (Loại) Vậy $(x; y)$ là $(5; 21), (21; 5)$	0,5 0,5 0,5 0,5
	Gọi đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $2x^2 - 5x + 2$ là $ax + b$ Thương của phép chia $f(x)$ cho $2x - 1$ là $A(x)$ và thương của phép chia $f(x)$ cho $x - 2$ là $B(x)$. Ta có $f(x) = (2x - 1).A(x)$ (1) $f(x) = (x - 2).B(x) + 6$ (2) $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + ax + b$ (3) xét $x = \frac{1}{2}$ từ (1) và (3) suy ra $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.a + b = 0$ xét $x = 2$ từ (2) và (3) suy ra $f(2) = 6 = 2a + b$ Từ đó suy ra $a = 4, b = -2$ Vậy $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + 4x - 2$.	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 2	Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ a) Rút gọn biểu thức P.	

	b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$. ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ a) $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$ $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$ b) $p = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$ $x = -1$ (KTM), $x = 1/2$ (TM)	0,5 1,0 1,5 0,5 0,5
Câu 3	a) Giải phương trình sau: $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$. Ta có $(x^2+x)(x^2+x-2) = 24$ Đặt $x^2+x = a$ ta có $a(a-2) = 24$ suy ra $a^2-2a=24$ suy ra $a=6, a=-4$. Với $a=6$ suy ra $x^2+x-6=0$ suy ra $x=2, x=-3$ Với $x=-4$ suy ra $x^2+x+4=0$ vô nghiệm.	1,0 1,0
	b) Cho $x > 0, y > 0$ và $x+y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$ $P = \left(\frac{28}{x} + 7x \right) + \left(y + \frac{1}{y} \right) + 2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y) + 2013$ Suy ra $P \geq 2\sqrt{\frac{28}{x}} \cdot 7x + 2\sqrt{\frac{1}{y}} \cdot y + 0 + 0 + 3 + 2013 \geq 2046$ Suy ra GTNN của P = 2046 khi $x=2, y=1$.	1,0 1,0

Câu 4		
	a) Chứng minh MNPQ là hình vuông b) S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi S_{AMQ} lớn nhất mà $S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}$ $AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$ S_{AMQ} lớn nhất là $\frac{AB^2}{8} \Leftrightarrow AM = MB$ Vậy S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.	2 0,5 1,0 0,5
		
	Gọi AD là phân giác của góc BAC Ta có: $AD \parallel FM \Rightarrow \frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD}$ (1) $ME \parallel AD \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}$ (2)	0,5 0,5

	Theo tính chất đường phân giác $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{DC}$ (3)	0,5
	Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM} \Rightarrow BF = CE$ (vì BM = CM)	0,5

Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.