

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5 - x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$.

2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{y}{z} \right) \left(1 + \frac{z}{x} \right).$$

Câu 2. (6,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2023)^2 + 4(x^2 - 5x - 2022)^2 = 4(2x^2 + x - 2023)(x^2 - 5x - 2022).$$

2. Tìm số nguyên n để $n^2 + 6n + 14$ là số chính phương.

3. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$.

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Đa thức $Q(x)$ nếu chia cho $x - 1$ được số dư bằng 4, nếu chia cho $x - 3$ được số dư bằng 14.

Tìm đa thức dư của phép chia $Q(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$.

2. Chứng minh rằng trong 14 số tự nhiên bất kỳ có ba chữ số, luôn tồn tại hai số sao cho khi ghép chúng lại cạnh nhau để được một số có sáu chữ số chia hết cho 13.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), phân giác trong AD ($D \in BC$), gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $\widehat{KBC} = 45^\circ$, đường thẳng qua A vuông góc với AD cắt KM tại N .

a) Chứng minh rằng $\triangle BDK \cong \triangle ADC$ và tam giác KBC vuông cân.

b) Phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AD tại I . Gọi E là giao điểm của AC và MN . Chứng minh rằng: $\widehat{ENC} = 45^\circ$ và $KI^2 = KM \cdot KN$.

2. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD ($D \in BC$). Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{KD} = 3$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng BK và AC . Tính tỉ số diện tích tam giác ABE và diện tích tam giác BCE .

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = x^2 + y^2 - 9x - 12y + \frac{16}{2x + y} + 25.$$

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Giám thị 1 (Họ tên và ký).....

Giám thị 2 (Họ tên và ký).....

Câu 1: (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5 - x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

2) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính giá trị của biểu thức $M = \left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{y}{z} \right) \left(1 + \frac{z}{x} \right)$

Câu 1	Nội dung	4,0 điểm
1.1. (2 điểm)	Với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$ ta có: $P = \left[\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right] : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$	0.25
	$= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$	0.5
	$= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$	0.25
	$= \frac{5 \cdot (2x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$	0.25
	$= \frac{10}{x-5} - \frac{2x}{x-5}$	0.25
	$= \frac{10-2x}{x-5} = \frac{2(5-x)}{x-5} = -2$	0.25
	Vậy $P = -2$ với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$	0.25
1.2.	Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 = 3xyz$	0.25
	$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Leftrightarrow [(x+y)^3 + z^3] - 3xy(x+y) - 3xyz = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2 - 3xy) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \end{cases}$	
	Trường hợp 1: $x+y+z=0$ học sinh tính được $M = -1$	0.5

Câu 1	Nội dung	4,0 điểm
(2 điểm)	Trường hợp 2: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ HS lập luận $x = y = z$ từ đó tính được $M = 8$	0.5
	HS kết luận bài toán	0.25

Câu 2: (6,0 điểm)

1) Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2023)^2 + 4(x^2 - 5x - 2022)^2 = 4(2x^2 + x - 2023)(x^2 - 5x - 2022)$$

2) Tìm số nguyên n để $n^2 + 6n + 14$ là số chính phương

3) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$.

Câu 2	Nội dung	6,0 điểm
2.1. (2 điểm)	Đặt: $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2023 \\ b = x^2 - 5x - 2022 \end{cases}$	0.5
	Phương trình đã cho trở thành: $a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$	0.5
	Khi đó, ta có: $2x^2 + x - 2023 = 2(x^2 - 5x - 2022) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2023 = 2x^2 - 10x - 4044$	0.5
	$\Leftrightarrow 11x = -2021 \Leftrightarrow x = \frac{-2021}{11}$.	0.25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2021}{11}$.	0.25
2.2. (2 điểm)	+ Ta có $n^2 + 6n + 14 = m^2, (m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z})$	0.5
	$\Leftrightarrow (n + 3)^2 + 5 = m^2 \Leftrightarrow (n + 3)^2 - m^2 = -5$	
	$\Leftrightarrow (m + n + 3)(n + 3 - m) = -5 \quad (1)$	0.5
	Ta có $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$; nên $m - n - 3 \in \mathbb{Z}, m + n + 3 \in \mathbb{Z}$, và $n + 3 + m \geq n + 3 - m$ + Mặt khác $-5 = -5.1 = 5.(-1)$ nên từ (1) và các lập luận trên ta có các trường hợp sau xảy ra:	0.25
	TH1: $\begin{cases} m + n + 3 = 1 \\ n + 3 - m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + m = -2 \\ n - m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -5 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0.25
2.3. (2 điểm)	TH2: $\begin{cases} m + n + 3 = 5 \\ n + 3 - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + m = 2 \\ n - m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0.25
	Vậy $n \in \{-1; -5\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán	0.25
	$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy \Leftrightarrow x^2y^2 - 7y^2 = x^2 + 2xy + y^2$	0.25
2.3. (2 điểm)	$\Leftrightarrow y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2 \quad (1)$	0.5
	* Với $y^2 = 0$ suy ra $x = y = 0$ thỏa mãn	0.5

Câu 2	Nội dung	6,0 điểm
	* Với $y^2 \neq 0$ thì do y^2 là số chính phương khác 0 và $(x+y)^2$ là số chính phương nên từ (1) ta có $x^2 - 7$ là số chính phương	0.25
	Từ đó tìm được $x = 4$; thì $y \in \{2; -1\}$ hoặc $x = -4$ tìm được $y \in \{-2; 1\}$	0.25
	HS kết luận các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là: $(0; 0); (4; 2); (4; -1) (-4; -2) (-4; 1)$	0.25

Câu 3: (3,0 điểm)

1. Đa thức $Q(x)$ nếu chia cho $x-1$ được số dư bằng 4, nếu chia cho $x-3$ được số dư bằng 14. Tìm đa thức dư của phép chia $Q(x)$ cho $(x-1)(x-3)$.

2. Chứng minh rằng trong 14 số tự nhiên bất kỳ có ba chữ số, luôn tồn tại hai số sao cho khi ghép chúng lại cạnh nhau để được một số có sáu chữ số chia hết cho 13.

Câu 3	Nội dung	3,0 điểm
3.1. (1,5 điểm)	Vì $Q(x)$ chia cho $x-1$ được số dư bằng 4 nên ta có $Q(1) = 4$ Vì $Q(x)$ chia cho $x-3$ được số dư bằng 14 nên ta có $Q(3) = 14$	0.5
	Gọi thương của phép chia $Q(x)$ cho $(x-1)(x-3)$ là $C(x)$ và dư là $R(x)$. Vì bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của đa thức chia nên bậc của nó nhỏ hơn 2, khi đó $R(x)$ có dạng $ax+b$	0.25
	Ta có: $Q(x) = (x-1)(x-3).C(x) + ax+b$ đúng với mọi số thực x $Q(1) = a+b = 4$ $Q(3) = 3a+b = 14$	0.25
	HS tìm được $\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$	0.25
	Vậy đa thức dư của phép chia $Q(x)$ cho $(x-1)(x-3)$ là $5x-1$	0.25
3.2. (1,5 điểm)	Khi chia 14 số tự nhiên có ba chữ số cho 13 ta được các số dư. Trong các số dư đó có ít nhất hai số bằng nhau.	0.25
	Giả sử hai số trong 14 số đó khi chia cho 13 có cùng số dư là $\overline{abc}; \overline{mnp}$ Suy ra $(\overline{abc} - \overline{mnp}) : 13$	0.25
	Khi ghép chúng cạnh nhau ta được số có sáu chữ số $\overline{abcmnp}$.	0.25
	Ta có $\overline{abcmnp} = 1000.\overline{abc} + \overline{mnp} = 1001.\overline{abc} + (\overline{mnp} - \overline{abc})$	0.25
	$= 13.77.\overline{abc} + (\overline{mnp} - \overline{abc})$	0.25
	Suy ra $\overline{abcmnp} : 13$. Điều phải chứng minh.	0.25

Câu 4: (6,0 điểm)

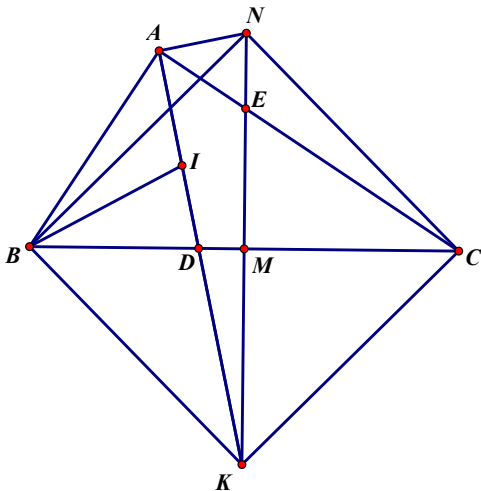
1. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), phân giác trong AD ($D \in BC$), gọi M là trung điểm của BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $\widehat{KBC} = 45^\circ$, đường thẳng qua A vuông góc với AD cắt KM tại N .

a. Chứng minh rằng $\triangle BDK \cong \triangle ADC$ và tam giác KBC vuông cân.

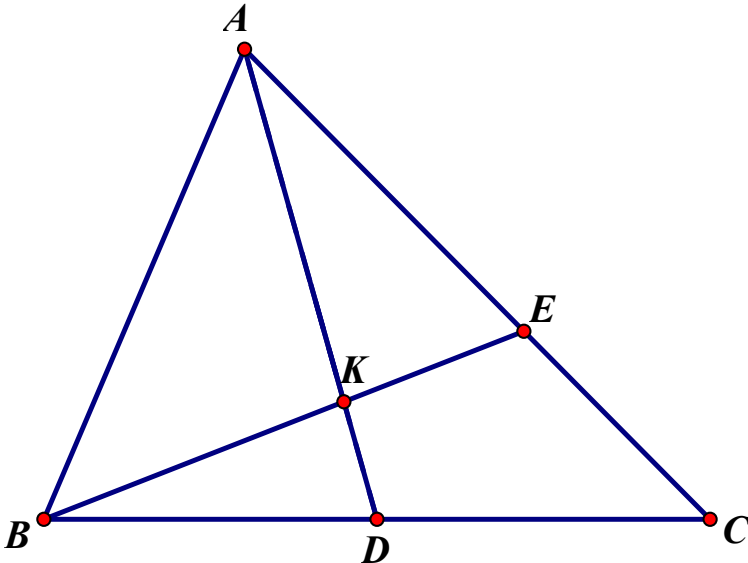
b. Phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AD tại I . Gọi E là giao điểm của AC và MN . Chứng minh rằng: $\widehat{ENC} = 45^\circ$ và $KI^2 = KM.KN$

2. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD ($D \in BC$). Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{KD} = 3$.

Gọi E là giao điểm của đường thẳng BK và AC . Tính tỉ số diện tích tam giác ABE và diện tích tam giác BCE .

Câu 4	Nội dung	6,0 điểm
		
4.1a. (3 điểm)	Tam giác ABC vuông tại A , phân giác trong AD ($D \in BC$) nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \quad (1)$	0.5
	Lại có $\widehat{DBK} = 45^\circ \quad (2) \text{ (GT)}$	
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DBK} = \widehat{DAC}$	0.5
	Xét $\triangle BDK \cong \triangle ADC$ có $\widehat{BDK} = \widehat{ADC}$ $\widehat{DBK} = \widehat{DAC}$ Do đó $\triangle BDK \cong \triangle ADC \text{ (g.g)} \quad (3)$	0.5
	Từ (3) suy ra $\frac{DB}{AD} = \frac{DK}{DC}$	0.5

Câu 4	Nội dung	6,0 điểm
	HS lập luận $\triangle ADB \cong \triangle CDK (c.g.c)$	0.5
	$\Rightarrow \widehat{KCD} = \widehat{BAD} = 45^\circ$ Vậy tam giác BCK vuông cân tại K .	0.5
4.1b. (2 điểm)	Từ chứng minh ở câu a suy ra $KM \perp BC$ và KM là phân giác $\widehat{BKC}$ nên $\widehat{CKE} = 45^\circ$. Ta có: $\widehat{NAC} = 90^\circ - \widehat{KAC} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$	0.25
	Ta có: $\widehat{NAC} = 90^\circ - \widehat{KAC} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. HS lập luận $\triangle ECK \cong \triangle ENA (g.g) \Rightarrow \frac{EC}{EN} = \frac{EK}{EA}$	0.25
	Do đó $\triangle AEK \cong \triangle NEC (c.g.c)$ suy ra $\widehat{ENC} = \widehat{EAK} = 45^\circ$	0.5
	Dẫn đến tam giác NMC vuông cân tại M suy ra tam giác BNC vuông cân tại N	0.25
	Khi đó tứ giác $BNCK$ là hình vuông ta có $\triangle KMB \cong \triangle KBN (g.g) \Rightarrow KB^2 = KM.KN (4)$	0.25
	$\widehat{BIK} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{IBK}$ nên tam giác IBK cân tại K dẫn đến $KB = KI (5)$	0.25
	Từ (4) và (5) suy ra $KI^2 = KM.KN$ (đpcm)	0.25

Câu 4	Nội dung	6,0 điểm
4.2. (1 điểm)		
	Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ACD$ đối với ba điểm B, K, E thẳng hàng, ta có: $\frac{AK}{KD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$	0.25
	$\Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$.	0.25
	Mặt khác $\triangle ABE$ và $\triangle BCE$ có chung đường cao kẻ từ B, suy ra: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCE}} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}} = \frac{3}{2}$.	0.25
	Vậy $\frac{S_{ABE}}{S_{BCE}} = \frac{3}{2}$	0.25

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = x^2 + y^2 - 9x - 12y + \frac{16}{2x + y} + 25.$$

Câu 5	Nội dung	1,0 điểm
1,0 điểm	Với $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 3$ ta có: $Q = x^2 + y^2 - 9x - 12y + \frac{16}{2x + y} + 25$	0.25
	$Q = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 7x - 8y + \frac{16}{2x + y} + 20$	
	$= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + \frac{16}{2x + y} + (2x + y) - 9(x + y) + 20$	0.25
	$Q \geq 0 + 0 + 2\sqrt{16} - 9 \cdot 3 + 20 = 1$	0.25

Câu 5	Nội dung	1,0 điểm
	$\begin{cases} x, y > 0 \\ (x-1)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \\ \frac{16}{2x+y} = 2x+y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 1 khi $x = 1, y = 2$	0.25
	Tổng	20 điểm

.....**HẾT**.....

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của thí sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu thí sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Bài 4 học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm chứng minh.
