

PHÒNG GD&ĐT NHƯ THANH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI
CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN VĂN HOÁ
LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 12/01/2023

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$.

Rút gọn A và tìm số nguyên x để A chia hết cho 2.

2. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6$

2. Phân tích đa thức sau thành phân tử:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm cặp số nguyên (x;y) thoả mãn phương trình: $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$

2. Cho x;y là các số nguyên khác 0; 1; -1 và $x^3 + y^3$ chia hết cho xy.

Chứng minh rằng $x^2 + 1$ không chia hết cho y.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tứ giác ABCD. Gọi E, I lần lượt là trung điểm của AC và BC; M là điểm đối xứng với I qua E.

1. Chứng minh tứ giác ABIM là hình bình hành.

2. Gọi N, F lần lượt là trung điểm của AD và BD; K là điểm đối xứng với I qua F.

Chứng minh: ba đường thẳng IN; MF; KE đồng quy.

3. Gọi O là giao hai đường chéo AC và BD. Kí hiệu $S; S_1; S_2$ lần lượt là diện tích tứ giác ABCD, tam giác AOB và tam giác COD. Biết $S_1 = a^2; S_2 = b^2$ với a, b là các số dương cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để $S = (a+b)^2$

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho các số dương x, y thoả mãn $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8$.

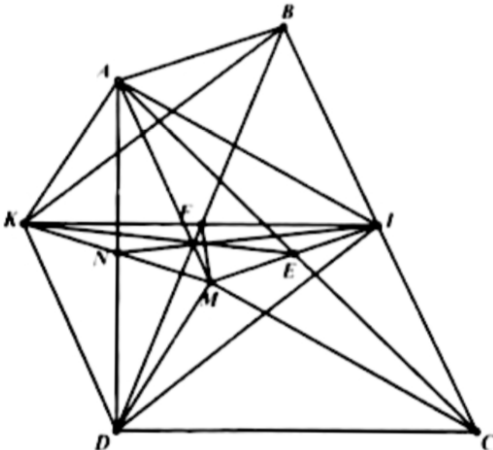
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.

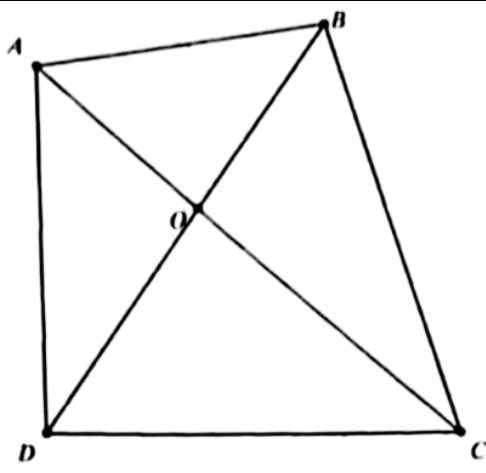
----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN

Câu	Ý	Tóm tắt nội dung hướng dẫn	Điểm
Câu 1	1 (2,5 đ)	Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$.	
		+) Với $x \neq 2; x \neq 3$ ta có: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} = \frac{(2x-9)-(x+3)(x-3)+(2x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$	0,5
		$= \frac{2x-9-x^2+9+2x^2-3x-2}{(x-3)(x-2)}$	0,25
		$= \frac{x^2-x-2}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-3}$	0,5
		Vậy với $x \neq 2; x \neq 3$ thì $A = \frac{x+1}{x-3}$	0,25
		+) Ta có: $A = \frac{x+1}{x-3}$ chia hết cho 2 thì A phải nhận giá trị nguyên. Do x nguyên nên A nhận giá trị nguyên khi x + 1 chia hết cho x - 3.	0,25
		Mà $x + 1 = x - 3 + 4$ nên suy ra 4 chia hết cho x - 3 $\Rightarrow x - 3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$. Suy ra $x \in \{4; 2; 5; 1; 7; -1\}$	0,5
		+) Đối chiếu với điều kiện $x \neq 2; x \neq 3$ và thử lại ta thấy $x \in \{7; -1\}$ là giá trị cần tìm.	0,25
	2 (1,5 đ)	Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.	
		Tính giá trị biểu thức $P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$	
		+) Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$ Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b, c đôi một khác nhau nên suy ra $a + b + c = 0$.	0,5
		Khi đó: $\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} = \frac{ab^2}{a^2+(b+c)(b-c)} = \frac{ab^2}{a^2+(-a)(b-c)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$ Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2} = \frac{a}{-2}$	0,5
		Công theo về các đẳng thức trên ta được: $P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a+b+c) = 0$ Vậy P = 0.	0,5
Câu 2		Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6$	

Câu 3	1 (2đ)	Điều kiện xác định: $x \notin \left\{a; \frac{2}{3}\right\}$	0,25
		Với điều kiện trên PT đã cho tương đương với $2x(3x^2 + x + 2) + 13x(3x^2 - 5x + 2) = 6(3x^2 + x + 2)(3x^2 - 5x + 2)$	0,25
		$\Leftrightarrow 54x^4 - 117x^3 + 105x^2 - 78x + 24 = 0$	
		$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(9x^2-3x+6)=0$	0,75
		$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = \frac{3}{4}$ (do $9x^2 - 3x + 6 = 0$ vô nghiệm)	0,5
		Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$	0,25
	2 (2đ)	Phân tích đa thức sau thành phân tử: $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$	
		Đặt $B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$ Và $x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x + y + z = c$ Khi đó: $B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$	0,5
		Ta có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$	0,75
		Vậy: $B = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2$ $B = 4(2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz) = 8xyz(x + y + z)$	0,75
	1 (2đ)	Tìm cặp số nguyên (x;y) thoả mãn phương trình: $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$	
		Phương trình $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5 \Leftrightarrow y(x^2 + 2) = x^3 + 3x - 5$ $\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x-5}{x^2 + 2}$ (do $x^2 + 2 > 0$)	0,5
		Với x nguyên, để y nguyên thì $x - 5$ chia hết cho $x^2 + 2$ Suy ra $(x + 5)(x - 5)$ chia hết cho $x^2 + 2 > 0$	0,5
		Suy ra 27 chia hết cho $x^2 + 2 > 0$ do đó $x^2 + 2 > 0$ chỉ có thể là 3; 9; 27.	0,5
		Từ đó ta có $x \in \{1; -1; 5; -5\}$ Thay lần lượt các giá trị của x vào đề bài ta tìm được các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn đề bài là (-1; -3); (5; 5).	0,5
	2 (2đ)	Cho x;y là các số nguyên khác 0; 1; -1 và $x^3 + y^3$ chia hết cho xy. Chứng minh rằng $x^2 + 1$ không chia hết cho y.	
		Vì $x^3 + y^3$ chia hết cho xy nên $\frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ là số nguyên. Đặt: $\frac{x^2}{y} = \frac{a}{b}; \frac{y^2}{x} = \frac{m}{n}$ với $(a, b) = 1; (m, n) = 1; b > 0; n > 0$	0,25

Câu 4		Theo giả thiết ta có $\frac{a}{b} + \frac{m}{n}$ là số nguyên nên $\frac{an+bm}{bn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an+bm:b \\ an+bm:n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an:b \\ bm:n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n:b \\ b:n \end{cases} \Rightarrow n=b \quad (1)$	0,5
		Mặt khác: $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = xy \in \mathbb{Z}$ nên $am:n \Rightarrow a:n$ (vì $(m,n)=1$) (2)	0,5
		Từ (1) và (2) suy ra $a:b \Rightarrow x^2:y$	0,25
		Do đó: $x^2+1:y \Leftrightarrow 1:y \Leftrightarrow y=\pm 1$. Không xảy ra do $y \neq \pm 1$ Vậy x^2+1 không chia hết cho y.	0,5
		Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, I lần lượt là trung điểm của AC và BC; M là điểm đối xứng với I qua E. 1. Chứng minh tứ giác $ABIM$ là hình bình hành. 2. Gọi N, F lần lượt là trung điểm của AD và BD; K là điểm đối xứng với I qua F. Chứng minh: ba đường thẳng IN; MF; KE đồng quy. 3. Gọi O là giao hai đường chéo AC và BD. Kí hiệu $S; S_1; S_2$ lần lượt là diện tích tứ giác $ABCD$, tam giác AOB và tam giác COD. Biết $S_1 = a^2; S_2 = b^2$ với a, b là các số dương cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để $S = (a+b)^2$	
			
	1	Vì M đối xứng với I qua E nên E là trung điểm của MI Tứ giác $AICM$ có E là trung điểm của hai đường chéo AC và MI nên $AICM$ là hình bình hành.	0,75
	(2đ)	$\Rightarrow AM \parallel IC$ và $AM = IC$. Mà $IC = BI$ và B, I, C thẳng hàng suy ra $AM \parallel BI$ và $AM = BI$.	0,75
		Tứ giác $AMIB$ có $AM \parallel BI$ và $AM = BI$ nên là hình bình hành	0,5
	2	Tương tự câu a, tứ giác $BKDI$ là hình bình hành	0,5
	(2đ)	$\Rightarrow KD \parallel BI$; $KD = BI$ mà $AM \parallel BI$; $AM = BI$ (do $ABMI$ là hình bình hành) $\Rightarrow KD \parallel AM$; $KD = AM \Rightarrow AMKD$ là hình bình hành $\Rightarrow N$ là trung điểm của MK	0,75

		Xét ΔMKI có N, F, E lần lượt là trung điểm của MK; KI; MI Suy ra IN; MF, KE là ba đường trung tuyến của tam giác $\Rightarrow$ IN; MF; KE đồng quy (ĐPCM)	0,75
	3 (2đ)		
		Ta có $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} \Rightarrow S_{AOD} \cdot S_{BOC} = a^2 \cdot b^2$	0,5
		Áp dụng BĐT: $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (S_{AOD} + S_{BOC})^2 \geq 4a^2b^2$ $\Rightarrow S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2ab$. Do a, b > 0	0,5
		Ta có $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{BOC} + S_{COD} \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ không đổi	0,5
		Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC} \Leftrightarrow AB \parallel CD$ hay ABCD là hình thang Vậy: $S_{ABCD} = (a+b)^2$ khi tứ giác ABCD là hình với hai đáy là: $AB \parallel CD$	0,5
	Câu 5 (2đ)	Cho các số dương x, y thỏa mãn $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.	
		Từ giả thiết $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 9$ $\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 \leq 9$, suy ra $(x+y)^2 \leq 9 \Rightarrow 0 < x+y \leq 3$	0,5
		Do x, y > 0 nên ta có: $P = \left(\frac{2}{x} + 2x\right) + \left(\frac{4}{y} + y\right) - 4x - 4y \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot 2x} + 2\sqrt{\frac{4}{y} \cdot y} - 4(x+y)$	0,5
		Suy ra $P \geq 8 - 4(x+y) \geq 8 - 4 \cdot 3 = -4$ (do $0 < x+y \leq 3$).	0,5
		Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi x = 1 và y = 2.	0,5

Chú ý:

- Bài hình nếu HS không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không tính điểm.
- HS nếu làm theo cách khác mà vẫn đúng thì vẫn chấm điểm tối đa bài đó.
- Điểm chấm chi tiết đến 0,25 đ.