

(Đề có 01 trang)

Bài 1: (4,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$

- Tìm ĐKXD và rút gọn P;
- Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$;
- Tìm các số nguyên x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (4 điểm)

- Cho x, y là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - 12| + 2y^2 - 16y + 2055$$

- Giải phương trình: $\frac{1}{2x^2+5x+2} + \frac{1}{2x^2+15x+22} + \frac{1}{2x^2+33x+121} = \frac{21}{11}$

Bài 3: (3 điểm)

- Tìm các số tự nhiên n để $A = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.
- Đa thức $f(x)$ chia cho $(x+1)$ dư 4, chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

Bài 4: (7 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.
- Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.
- Chứng minh điểm H cách đều 3 cạnh của tam giác DEF.
- Trên đoạn thẳng HB, HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

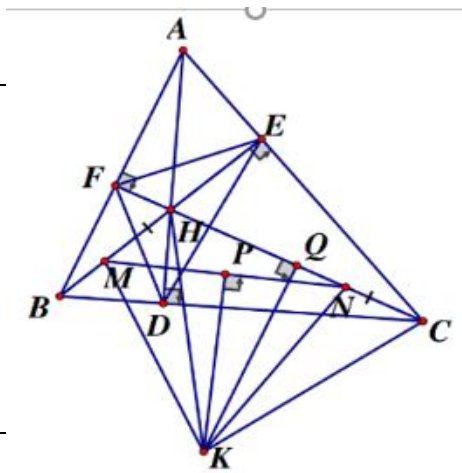
----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:Số BD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM TOÁN 8 (2022 - 2023)

Bài	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1: (5 điểm)	a) Tìm được ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq -1$ Rút gọn được $P = \frac{x^2}{x-1}$	2 điểm
	b) Với $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq -1$ Ta có $P = \frac{-1}{2}$ khi $\frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ $\Rightarrow 2x^2 = -x + 1$ Giải được $x = -1$ (loại); $x = \frac{1}{2}$ (nhận) Vậy $x = \frac{1}{2}$	1 điểm
	c) Với $x \neq 0$; $x \neq 1$; $x \neq -1$ ta có: $P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ Với x là số nguyên thì $x + 1$ nhận giá trị nguyên, khi đó P nhận giá trị nguyên khi $\frac{1}{x-1}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 1 \in \{-1; 1\}$ +) $x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) +) $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn) Vậy $x = 2$ thì P nhận giá trị nguyên.	1,5 điểm
Bài 2: (4 điểm)	a) $A = x - 12 + 2y^2 - 16y + 2055$ Ta có: $ x - 12 \geq 0$, dấu “=” xảy ra khi $x = 12$. $2y^2 - 16y + 2055 = 2(y^2 - 8y + 16) + 2023 = 2(y - 4)^2 + 2023 \geq 2023$, dấu “=” xảy ra khi $y = 4$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 2023 đạt được khi $x = 12$ và $y = 4$	2 điểm
	Tìm ĐKXĐ: $2x^2 + 5x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ và $x \neq -\frac{1}{2}$ $2x^2 + 15x + 22 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(2x + 11) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ và $x \neq -\frac{11}{2}$ $2x^2 + 33x + 121 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 11)(2x + 11) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -11$ và $x \neq -\frac{11}{2}$ ĐKXĐ: $x \neq -2$; $x \neq -\frac{1}{2}$; $x \neq -\frac{11}{2}$; $x \neq -11$. Có: $\frac{3}{2x^2+5x+2} + \frac{7}{2x^2+15x+22} + \frac{11}{2x^2+33x+121} = \frac{21}{11}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{(x+2)(2x+1)} + \frac{7}{(x+2)(2x+11)} + \frac{11}{(x+11)(2x+11)} = \frac{21}{11}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{(x+2)(2x+1)} + \frac{7}{(x+2)(2x+11)} + \frac{11}{(x+11)(2x+11)} \right] = \frac{21}{22}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{2(x+2)(2x+1)} + \frac{7}{2(x+2)(2x+11)} + \frac{11}{2(x+11)(2x+11)} = \frac{21}{22}$	2 điểm

	$\Leftrightarrow \frac{3}{(2x+4)(2x+1)} + \frac{7}{(2x+4)(2x+11)} + \frac{11}{(2x+22)(2x+11)} = \frac{21}{22}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+4} + \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+11} + \frac{1}{2x+11} - \frac{1}{2x+22} = \frac{21}{22}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+22} = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{21}{(2x+1)(2x+22)} = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{21}{(2x+1)(2x+22)} = \frac{21}{22}$ Suy ra: $(2x + 1)(2x + 22) = 22$ $4x^2 + 46x + 22 = 22$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 46x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x + 23) = 0$ +) $x = 0$ (thỏa mãn) +) $2x + 23 = 0 \Leftrightarrow x = -11,5$ (thỏa mãn) Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0$ hoặc $x = -11,5$.	
Bài 3: (3 điểm)	a) $A = (n^2 - 8)^2 + 36$ $= n^4 - 16n^2 + 64 + 36$ $= n^4 - 16n^2 + 100$ $= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2$ $= (n^2 + 10)^2 - (6n)^2$ $= (n^2 + 10 - 6n)(n^2 + 10 + 6n)$ Có $(n^2 + 10 - 6n) < (n^2 + 10 + 6n)$ (vì n là số tự nhiên) Để A là số nguyên tố thì $n^2 + 10 - 6n = 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 = 0$ $\Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = 3$ Thay $n = 3$ có $A = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố. Vậy $n = 3$ là giá trị cần tìm.	1,5 điểm
	Do $(x + 1)(x^2 + 1)$ có bậc 3 nên khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$ thì đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$. Gọi thương của chúng là Q Ta có $f(x) = (x + 1)(x^2 + 1).Q + ax^2 + bx + c$ Vì đa thức $f(x)$ chia cho $(x+1)$ dư 4 mà $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ nên: $f(-1) = (-1 + 1)[(-1)^2 + 1].Q + a(-1)^2 + b(-1) + c = 4$ $\Leftrightarrow a - b + c = 4 \quad (1)$ Mặt khác $f(x) = (x + 1)(x^2 + 1).Q + ax^2 + bx + c$ $= (x + 1)(x^2 + 1).Q + a(x^2 + 1) - a + bx + c$ $= (x^2 + 1)[Q.(x + 1) + a] + bx - a + c$ Vì đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $x^2 + 1$ dư $2x + 3$ nên $bx - a + c = 2x + 3$ với mọi x Do đó $\begin{cases} b = 2 \\ -a + c = 3 \end{cases} \quad (2)$ Từ (1) và (2) có $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (2)$ Vậy đa thức dư cần tìm là $\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$	1,5 điểm
Bài 4: (7 điểm)	a) Chứng minh $\Delta AEB \sim \Delta AFC$ (gg) Suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$	2 điểm

	Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ (cgc) suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$	
	b) Chứng minh $\triangle BEC \sim \triangle BDH$ (gg) suy ra $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BH} \Rightarrow BE \cdot BH = BD \cdot BC$ Chứng minh $\triangle CFB \sim \triangle CDH$ (gg) suy ra $\frac{CF}{CD} = \frac{CB}{CH} \Rightarrow CF \cdot CH = CD \cdot BC$ nên $BE \cdot BH + CF \cdot CH = BD \cdot BC + CD \cdot BC$ $= (BD + CD) \cdot BC = BC^2$ Vậy $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$	 2 điểm
	c) Theo câu a) có: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{CED} = \widehat{CBA}$ Suy ra, $\widehat{AEF} = \widehat{CED}$ Lại có: $\widehat{AEF} + \widehat{FEB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ Mà $\widehat{CED} + \widehat{BED} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED} \Rightarrow EB$ là đường phân giác góc FED của tam giác FED. Chứng minh tương tự có FC, DA lần lượt là các đường phân giác của tam giác DEF, mà H là giao điểm của 3 đường phân giác đó nên H cách đều 3 cạnh của tam giác DEF	2 điểm
	d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của MN, HC. Kẻ đường trung trực của các đoạn thẳng HC và MN chúng cắt nhau tại K $\Rightarrow$ đường thẳng KQ cố định. Vì $HM = CN$ (gt); $KH = KC$ (do K thuộc đường trung trực KQ của đoạn HC) $KM = KN$ (do K thuộc đường trung trực KP của đoạn MN) Nên $\triangle MHK = \triangle NCK$ (ccc) Suy ra, $\widehat{MHK} = \widehat{NCK}$ Lại có $\triangle KCH$ cân tại K (do $KH = KC$) nên $\widehat{KHC} = \widehat{KCH} = \widehat{NCK}$ Suy ra $\widehat{MHK} = \widehat{KHC} \Rightarrow HK$ là tia phân giác của $\widehat{MHC} \Rightarrow$ đường thẳng HK cố định Do vậy K là điểm cố định. Kết luận.	1 điểm
Bài 5: (1 điểm)	Vì a,b,c là các số dương mà $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b Nên $\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$ Tương tự có $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \quad \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$ Do đó	1,5 điểm

	$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a - \frac{ab}{2} + b - \frac{bc}{2} + c - \frac{ca}{2} = (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \quad (1)$ Lại có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$ Suy ra, $a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$ Mà $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ Nên $3^2 \geq (ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)$ $\Leftrightarrow 3 \geq (ab + bc + ca) \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra, $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot 3$ Vậy $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$	
--	--	--

(Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)