

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$, với $x \neq \pm 1$.

Rút gọn biểu thức A. Tính giá trị biểu thức A khi x thỏa mãn: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một không đối nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 5$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$.

2. Tìm a, b sao cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^2 + xy = 2022x + 2023y + 2024$.

2. Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5.

Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ $DM \perp CE$.

1. Chứng minh tứ giác ADKE là hình chữ nhật, từ đó suy ra $AM \perp KM$.

2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh $\triangle ADM$ cân và tính số đo của góc ANB.

3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng $CF \leq 2EF$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương: $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 6.$$

..... Hết

Họ tên thí sinh :..... Số báo danh :.....

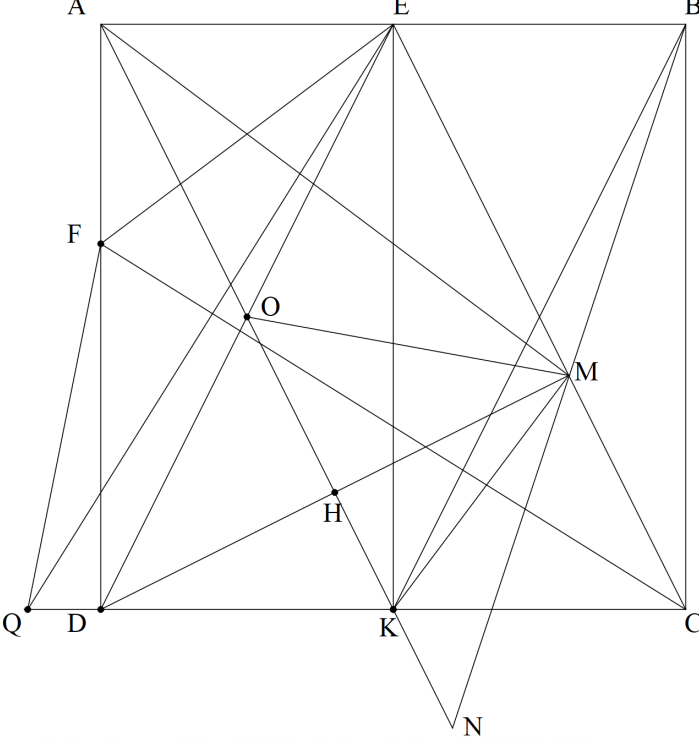
Giám thị số 1 :..... Giám thị số 2:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1. (4,0 điểm)	1	Với $x \neq \pm 1$ $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)} - \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x - 1)^2}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{1 - x}{x^2 + 1}.$	0.25
		Vậy: $A = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$ (với $x \neq \pm 1$).	0.25
		Với $x \neq \pm 1$ Ta có $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$	0.25
		$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (L)} \\ x = -2 \text{ (T / m)} \\ x = 3 \text{ (T / m)} \end{cases}$	0.25
		Với $x = -2 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$	0.25
		Với $x = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$	0.25
	2	Ta có $ab + bc + ca = 5 \Rightarrow a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$	0.5
		Tương tự: $b^2 + 5 = (b + c)(b + a)$; $c^2 + 5 = (c + a)(b + c)$	0.5
		$P = \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(5 + a^2)(5 + b^2)(5 + c^2)} = \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(a + b)(a + c)(b + c)(b + a)(c + a)(c + b)}$	0.5
		$= \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2} = 1$	0.5
Câu 2. (4,0 điểm)	1	Ta có: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$	
		$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 1) = 192$	0.25
		$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 1)(x + 3) = 192 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 192 \quad (*)$	0.25
		Đặt $t = x^2 + 2x + 1$ (ĐK : $t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = t - 4$ Thay vào (*) ta được	0.25

Câu 3. (4,0 điểm)		$t(t-4)=192 \Leftrightarrow t^2-4t-192=0 \Leftrightarrow (t-16)(t+12)=0$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} t=16(TM) \\ t=-12(KTM) \end{cases}$	0.25
		Với $t=16 \Rightarrow x^2+2x+1=16 \Leftrightarrow (x+1)^2=16 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$	0.5
		Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-3;5\}$	0.25
	2	Ta có : $g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$	0.25
		Vì $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$	
		Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x)=g(x).q(x)$	0.25
		$\Rightarrow ax^3+bx^2+10x-4=(x+2).(x-1).q(x)$	0.25
		Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6(1)$	0.25
		Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0(2)$	0.25
Câu 4		Thay (1) vào (2) . Ta có : $2a-(-a-6)+6=0 \Rightarrow a=-4;$ $b=-2$	0.25
		Vậy $a=-4; b=-2$	0.25
			0.25
	1	$x^2+xy=2022x+2023y+2024$ $\Leftrightarrow (x+y+1)(x-2023)=1$ Vì x, y nguyên nên $x+y+1$ và $x-2023$ là ước của 1	0.5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=1 \\ x-2023=1 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=-1 \\ x-2023=-1 \end{cases}$	0.5
		TH1: $\begin{cases} x+y+1=1 \\ x-2023=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2024 \\ x=2024 \end{cases}$	0.25
		TH2: $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ x-2023=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2024 \\ x=2022 \end{cases}$	0.25
		Vậy các cặp $(x;y)$ nguyên cần tìm là: $\{(2024;-2024);(2022;-2024)\}$	0.25
	2	Đặt $a=x^2-2xy-y, b=xy-2y^2-x, c=2x^2+y^2+2x+y$. Ta có $a-b=(x-y)(x-2y+1)$. Do a và b chia hết cho 5 nên $a-b$ chia hết cho 5. Suy ra $x-y \vdots 5$ hoặc $x-2y+1 \vdots 5$. ▪ Trường hợp 1: Nếu $x-y \vdots 5$ thì $x \equiv y \pmod{5}$. Khi đó $a \equiv x^2-2x^2-x=-(x^2+x) \pmod{5};$ $c \equiv 2x^2+x^2+2x+x=3(x^2+x) \pmod{5}.$ Do $a \vdots 5$ nên $x^2+x \vdots 5$ hay $c \vdots 5$. ▪ Trường hợp 2: Nếu $x-2y+1 \vdots 5$ thì $x \equiv 2y-1 \pmod{5}$. Khi đó $a \equiv (2y-1)^2-2(2y-1)y-y=-3y+1 \pmod{5};$ $c \equiv 2(2y-1)^2+y^2+2(2y-1)+y \equiv 9y^2-3y \equiv 3y(3y-1) \pmod{5}.$ Do $a \vdots 5$ nên $3y-1 \vdots 5$ hay $c \vdots 5$. Từ hai trường hợp trên suy ra ĐPCM	0.5
			0.25

(6,0 điểm) m		
1 3 điểm	Chứng minh được AEKD là hình chữ nhật. Ta có O là giao điểm của 2 đường chéo AK và DE nên $OA = OE = OK = OD = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{2} DE$ $\Rightarrow MO = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} AK \Rightarrow \Delta AMK$ vuông tại K $\Rightarrow AM \perp KM$ (ĐPCM)	1.0 1.0 1.0
2 1,5 điểm	Gọi H là giao điểm của AK và DM Chứng minh được AECK là hình bình hành . Từ đó suy ra $AK \parallel CE \Rightarrow HK \parallel MC$ mà $KD = KC \Rightarrow HD = HM$ kết hợp với $DM \perp CE \Rightarrow AH \perp DM$ $\Rightarrow \Delta ADM$ cân tại A $\Rightarrow AD = AM = AB \Rightarrow \Delta AMB$ cân tại A Do ΔADM cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMD} = \frac{180^\circ - \widehat{DAM}}{2}$ Do ΔABM cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAM}}{2}$ $\Rightarrow \widehat{AMD} + \widehat{AMB} = \frac{180^\circ - \widehat{DAM} + 180^\circ - \widehat{BAM}}{2} =$ $\frac{360^\circ - (\widehat{DAM} + \widehat{BAM})}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 135^\circ$ Lại có $\widehat{BMD}$ là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được $\widehat{ANB} = 45^\circ$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

	3	Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q Xét hình vuông ABCD có EK là đường trung bình . Suy ra $EK = AD = CD$, $EK \parallel AD \Rightarrow AD \perp CD \Rightarrow \widehat{EKQ} = 90^\circ$ Xét $\triangle CDF$ và $\triangle EKQ$ có: $\widehat{KEQ} = \widehat{FCQ}$ (cùng phụ với góc EQC); $CD = EK$; $\widehat{EKQ} = \widehat{CDF} = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle CDF = \triangle EKQ$ (g.c.g) $\Rightarrow CF = EQ$ (Hai cạnh tương ứng) Xét $\triangle CEQ$ có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao. Suy ra $\triangle CEQ$ cân tại C $\Rightarrow CF$ cũng là đường trung trực $\Rightarrow FE = FQ$ (tính chất đường trung trực) $\Rightarrow EF + FQ = 2EF$ $\Rightarrow EQ \leq EF + FQ = 2EF$. Dấu “=” xảy ra khi E; Q, F thẳng hàng Mà $EQ = FC \Rightarrow FC \leq 2EF$ (ĐPCM)	0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
Câu 5 (2,0 điểm)		Ta có: $\frac{1+3a}{1+b^2} = (1+3a)\left(1 - \frac{b^2}{1+b^2}\right) = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2}$ Ta chứng minh được $\frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{2}$.Thật vậy: $\frac{b}{1+b^2} - \frac{1}{2} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{2b-1-b^2}{2(1+b^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(b-1)^2}{2(1+b^2)} \leq 0$ đúng với mọi b. Do đó $\frac{b^2}{1+b^2} \leq \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{-b^2}{1+b^2} \geq \frac{-b}{2}$ Khi đó $\frac{1+3a}{1+b^2} = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2} \geq 1+3a - \frac{b(1+3a)}{2}$ (1) Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{1+3b}{1+c^2} \geq 1+3b - \frac{c(1+3b)}{2}$ (2) Và $\frac{1+3c}{1+a^2} \geq 1+3c - \frac{a(1+3c)}{2}$ (3) Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có: $\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 3+3(a+b+c) - \frac{b(1+3a)+c(1+3b)+a(1+3c)}{2}$ $= 3+3(a+b+c) - \frac{(a+b+c)+3(ab+bc+ca)}{2} = \frac{5(a+b+c)}{2} - \frac{3}{2}$ Lại có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \forall a;b;c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc+ca)$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow a+b+c \geq 3$. Do đó $\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq \frac{5.3}{2} - \frac{3}{2} = 6$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$	0,25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
			0.25

Ghi chú:

-Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

-Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.