

Họ và tên thí sinh :Số báo danh

Họ và tên, chữ ký: Giám thị thứ nhất:

Giám thị thứ hai:

Câu 1 (4,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 4} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} \right) : \left(x + 2 + \frac{x^2 - 6}{2-x} \right)$ với $x \neq \pm 2$.

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm giá trị của x để A nhận giá trị âm.
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(x-y-z)^2 - y^2 + 2yz - z^2$.

b) Cho 3 số nguyên dương $a_1; a_2; a_3$ có tổng bằng 2022^{2023} . Chứng minh rằng: $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$ chia hết cho 3.

Câu 3 (4,5 điểm)

a) Giải các phương trình sau: $\frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{-3}{2}$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{y}{x-3} + \frac{5y-4x}{x-5}$. Biết $2x - y = 6$.

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn: $x^2 + 5y^2 + 4xy = 2023$.

Câu 4 (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A (góc A nhọn), đường cao AH cắt tia phân giác BD tại điểm I. Gọi M là hình chiếu của điểm H trên cạnh AC, K là trung điểm của HM.

- Chứng minh $\frac{AH}{HC} = \frac{HM}{CM}$.
- Chứng minh AK vuông góc với BM.
- Biết $AI = 5\text{cm}$, $HI = 4\text{cm}$. Tính độ dài cạnh BC.

Câu 5 (2,0 điểm)

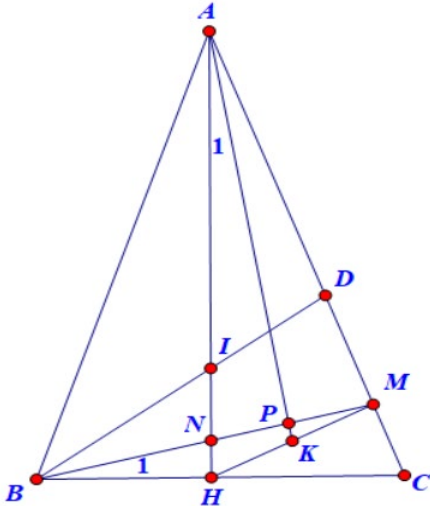
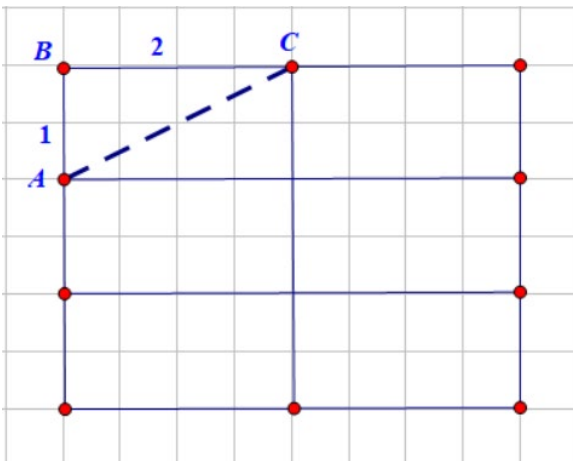
a) Xét hình chữ nhật kích thước 3cm x 4 cm. Chứng minh rằng với 7 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật, luôn có thể chọn ra hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 3.

b) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x > -1$; $y > 1$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right)^2 + \left(y - 1 + \frac{1}{y-1} \right)^2$.

-----Hết.-----

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,5 điểm)	a) (2,0 điểm)	
	$A = \left(\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 4} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} \right) : \left(x + 2 + \frac{x^2 - 6}{2 - x} \right)$ với $x \neq \pm 2$.	
	$A = \left(\frac{2x^2 + x - 6}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right) : \left(\frac{x^2 - 4}{x-2} - \frac{x^2 - 6}{x-2} \right)$	0,5
	$A = \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)} : \frac{2}{x-2}$	0,75
	$A = \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{2} = \frac{x^2}{x+2}$	0,75
	b) (1,5 điểm)	
	Ta có: $A = \frac{x^2}{x+2}$ ($x \neq \pm 2$) nhận giá trị âm thì $A < 0$ nên $\frac{x^2}{x+2} < 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x+2 < 0$ (vì $x^2 \geq 0$ với mọi $x \neq \pm 2$) $\Leftrightarrow x < -2$ (thỏa mãn đk)	0,75
	Vậy $x < -2$ thì A nhận giá trị âm.	0,25
	c) (1,5 điểm)	
	Ta có: $A = \frac{x^2}{x+2} = \frac{x^2 - 4}{x+2} + \frac{4}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ với $x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 2$.	0,5
	Để A nhận giá trị là số nguyên thì $\frac{4}{x+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2 \in U(4)$	0,25
	$\Rightarrow x+2 \in \{1; -1; 2; -2; 4; -4\} \Rightarrow x \in \{-1; -3; 0; -4; 2; -6\}$	0,5
	$x \in \mathbb{Z}, x \neq \pm 2 \Rightarrow x \in \{-1; -3; 0; -4; -6\}$	0,25
	Vậy $x \in \{-1; -3; 0; -4; -6\}$ thì A nhận giá trị là số nguyên.	
Câu 2 (4,0 điểm)	a) (2,0 điểm)	
	$(x - y - z)^2 - y^2 + 2yz - z^2$	
	$= (x - y - z)^2 - (y^2 - 2yz + z^2) = (x - y - z)^2 - (y - z)^2$	1,0
	$= (x - y - z + y - z)(x - y - z - y + z)$	0,5
	$= (x - 2z)(x - 2y)$	0,5
	b) (2,0 điểm)	
	Ta có: $2022^{2023} : 3; a_1 + a_2 + a_3 = 2022^{2023}$ nên $a_1 + a_2 + a_3 : 3$.	0,5
	Với $n \in \mathbb{Z}$ thì $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1) : 3 \Rightarrow n^3 - n : 3$ (vì $n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên tích chia hết cho 3).	0,5

	Do đó: $(a_1^3 - a_1) : 3; (a_2^3 - a_2) : 3; (a_3^3 - a_3) : 3$	
	$\Rightarrow (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) : 3. \Rightarrow (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) - (a_1 + a_2 + a_3) : 3$	0,5
	Mà $a_1 + a_2 + a_3 : 3$ nên $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 : 3$.	0,5
Câu 3 (4,5 điểm)	a) (1,5 điểm)	
	$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = -\frac{3}{2}. \quad (1)$ ĐK: $x \neq -3; x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6$	0,25
	(1)	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = -\frac{3}{2}.$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{(x+3)(x+6)} = -\frac{3}{2}$	0,5
	$\Rightarrow (x+3)(x+6) = -2 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+5) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \end{cases}$ (không tmđk). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.	0,25
	b) (1,5 điểm)	
	Ta có: $B = \frac{y}{x-3} + \frac{5y-4x}{x-5}. (x \neq 3; x \neq 5); 2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6.$ Khi đó: $B = \frac{2x-6}{x-3} + \frac{5(2x-6)-4x}{x-5}.$	0,5
	$B = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{6x-30}{x-5} = 2 + \frac{6(x-5)}{x-5} = 2 + 6 = 8.$	1,0
	c) (1,5 điểm)	
	Ta có: $x^2 + 5y^2 + 4xy = 2023. (1) (x, y \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (x+2y)^2 + y^2 = 2023.$	0,25
	Với $n \in \mathbb{Z}$ thì $n \equiv 0; 1; 2; 3 \pmod{4} \Rightarrow n^2 \equiv 0; 1 \pmod{4}$ Vậy $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $(x+2y)^2 \equiv 0; 1 \pmod{4}$ và $y^2 \equiv 0; 1 \pmod{4}$	0,5
	nên $(x+2y)^2 + y^2 \equiv 0; 1; 2 \pmod{4}$ mà $2023 \equiv 3 \pmod{4}$	0,5
	Do đó, phương trình $(x+2y)^2 + y^2 = 2023$, không có nghiệm nguyên.	0,25
	Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.	

Câu 4: (5,0 điểm)		
	a) (2,0 điểm)	
	Chứng minh $\triangle AHM \sim \triangle HCM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{HM}{CM}$	2,0
	b) 1,5 điểm)	
	Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BM và AH, AK.	
	- Ta có: $\frac{AH}{HC} = \frac{HM}{CM}$ mà $HM = 2HK$, $BC = 2CH$ nên $\frac{AH}{BC} = \frac{HK}{CM}$	0,5
	- Chứng minh $\triangle AHK \sim \triangle BMC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$	0,5
	- Chứng minh $\triangle NAP \sim \triangle NBH$ (g-g) $\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{BHN}$, mà $\widehat{BHN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APN} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp BM$	0,5
	c) (1,5 điểm)	
	Ta có: $AH = AI + HI = 5 + 4 = 9$ (cm)	0,5
	Vì BD là tia phân giác của $\triangle ABC$ nên BI là tia phân giác của $\triangle ABH \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{HI}{AI} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{5}{4}.BH$	
	Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$ $\Rightarrow 9^2 + BH^2 = \left(\frac{5}{4}.BH\right)^2 \Rightarrow BH = 12$ (cm)	0,5
	$\triangle ABC$ cân tại A, có $BC = 2.BH = 2.12 = 24$ (cm)	0,5
Câu 5 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
	 Chia hình chữ nhật kích thước 3cm x 4 cm thành 6 hình chữ nhật nhỏ kích thước 1 cm x 2 cm (hình vẽ).	0,25

	Theo nguyên lý Dirichlet, trong 7 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật kích thước 3cm x4 cm (hay nằm trong 6 hình chữ nhật kích thước 1 cm x 2 cm) thì luôn tồn tại 2 điểm cùng thuộc một chữ nhật kích thước 1 cm x 2 cm và khoảng cách giữa hai điểm này luôn nhỏ hơn độ dài đường chéo $AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 3$.	0,5
	Vậy với 7 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật kích thước 3cm x4 cm, luôn có thể chọn ra hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 3.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	$x > -1; y > 1$ thì $x + 1 > 0; y - 1 > 0; x + y = 1 \Leftrightarrow (x + 1) + (y - 1) = 1$ Đặt $(x + 1) = a; (y - 1) = b \ (a, b > 0) \Rightarrow a + b = 1$ $P = \left(x + 1 + \frac{1}{x + 1}\right)^2 + \left(y - 1 + \frac{1}{y - 1}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, có: $\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] \cdot (1^2 + 1^2) \geq \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$	0,25
	Mà $a, b > 0, a + b = 1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b} = 4$ nên $\Rightarrow 2.P \geq (1 + 4)^2 \Rightarrow P \geq \frac{25}{2}$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}; y = \frac{3}{2}$.	
	Vậy $P_{\min} = \frac{25}{2}$ khi $x = \frac{-1}{2}; y = \frac{3}{2}$.	0,25

Lưu ý:

- Lời giải chỉ trình bày tóm tắt, học sinh trình bày hoàn chỉnh, lý luận chặt chẽ mới cho điểm tối đa.
- Học sinh có thể trình bày nhiều cách giải khác nhau nếu đúng thì cho điểm tương ứng./.