

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút
(Đề bài gồm 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

2) Cho đa thức $A(x) = x^{2022} + ax^{2021} - 3(a+2)x^2 + 2020$ và $B(x) = x - 1$. Tìm hệ số a để đa thức $A(x)$ chia cho đa thức $B(x)$ dư -5

Câu 2 (2,0 điểm).

1) Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ (với $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$)

Rút gọn A và tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Cho a, b, c là các số nguyên và thỏa mãn $a^3 + b^3 = 5c^3 + 11d^3$. Chứng minh rằng tổng $(a + b + c + d)$ chia hết cho 6.

Câu 3 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x-1}{999} + \frac{x-2}{499} + \frac{x-4}{332} = 6$

2) $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng (d) song song với AH , (d) cắt đường thẳng AC tại P . Gọi Q là trung điểm của BP , tia AQ cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh:

1) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$

2) Tam giác ABP vuông cân và $\triangle BHQ$ đồng dạng với $\triangle BPC$.

3) $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

Câu 5 (1,0 điểm).

1) Chứng minh $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ với x, y là các số dương.

2) Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn $a.b.c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$$

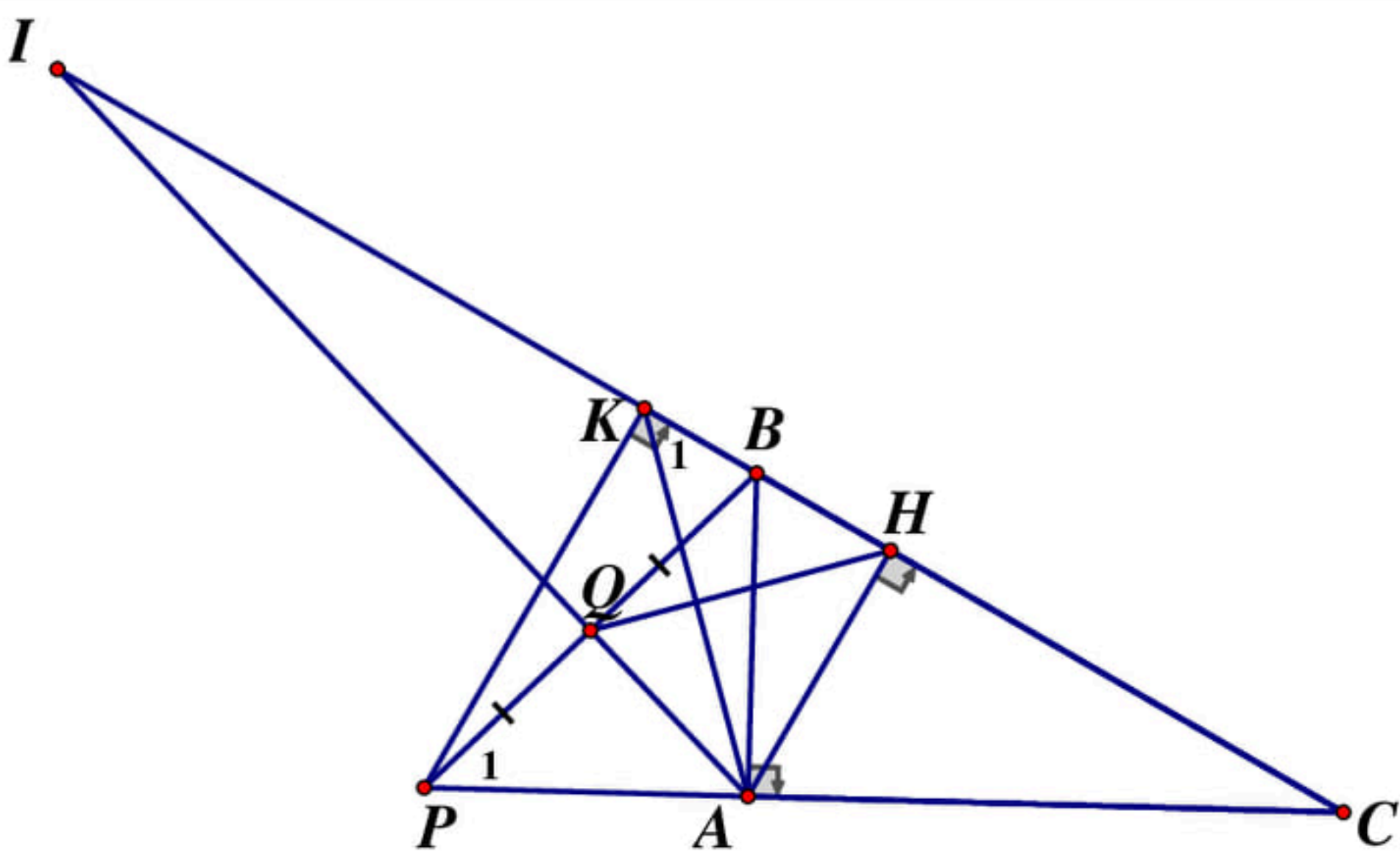
————— Hết —————

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị 1: Chữ kí giám thị 2:

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1	1	$x^3 - 2x^2 + x - xy^2$ $= x(x^2 - 2x + 1 - y^2)$	0.5
		$= x(x - 1 - y)(x - 1 + y)$	0.5
	2	Gọi thương của phép chia $A(x)$ cho $B(x)$ là $Q(x)$ Theo bài ra ta có: $x^{2022} + ax^{2021} - 3(a + 2)x^2 + 2020 = (x - 1).Q(x) - 5 \quad \forall x \quad (1)$	0.25
		Thay $x = 1$ vào (1) ta được: $1 + a - 3a - 6 + 2020 = 0 - 5$	0.25
		$\Leftrightarrow -2a = -2020$	0.25
		$\Leftrightarrow a = 1010$. Vậy $a = 1010$	0.25
2	1	$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x}$ $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1}$	0.25
		$A = 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$	0.25
		+ Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$. Ta có $A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$	0.25
	2	+ Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x - 1)$ phải là ước của 2 suy ra $x - 1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$	0.25
		+ Xét từng trường hợp tìm x + Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 2$ hoặc $x = 3$ thỏa mãn và kết luận	0.25
	2	Với a, b, c là các số nguyên, ta có: $a^3 + b^3 = 5c^3 + 11d^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6c^3 + 12d^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6.(c^3 + 2d^3)$ $\Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$ chia hết cho 6 (1)	0.25

		Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$ $= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$ $= a(a + 1)(a - 1) + b(b + 1)(b - 1) + c(c + 1)(c - 1) + d(d + 1)(d - 1)$	0.25
		Do $(a - 1).a.(a + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên $(a - 1).a.(a + 1)$ chia hết cho 6 Tương tự: $b(b + 1)(b - 1)$; $c(c + 1)(c - 1)$; $d(d + 1)(d - 1)$ chia hết cho 6 $\Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d) \text{ chia hết cho } 6 \quad (2)$	0.25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 6	0.25
3	1	a) $\frac{x-1}{999} + \frac{x-2}{499} + \frac{x-4}{332} = 6$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{999} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{499} - 2\right) + \left(\frac{x-4}{332} - 3\right) = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow \frac{x-1000}{999} + \frac{x-1000}{499} + \frac{x-1000}{332} = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow (x-1000) \cdot \left(\frac{1}{999} + \frac{1}{499} + \frac{1}{332}\right) = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow x = 1000 \text{ do } \left(\frac{1}{999} + \frac{1}{499} + \frac{1}{332}\right) \neq 0$	
		Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1000$	0.25
	2	b) $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$ $(x \neq -4; -5; -6; -7)$	0.25
		$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$	0.25
		$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+4)(x+7)$ $\Leftrightarrow 18x + 126 - 18x - 72 = x^2 + 11x + 28$ $\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0$	0.25

		$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = -13; x = 2$.	
4	1		0.25
		Chứng minh $AB^2 = BH \cdot BC$	0.25
		Chứng minh $AC^2 = CH \cdot BC$	0.25
		$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{BH}{CH}$	0.25
	2	$PK \parallel AH \Rightarrow \triangle CKP \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CK}{CP} = \frac{CA}{CB}$ Suy ra $\triangle AKC \sim \triangle BPC$ (c.g.c) (1)	0.25
		$\triangle AKH \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow K_1 = 45^\circ. \text{ Từ (1)}$ $\Rightarrow K_1 = P_1 = 45^\circ \Rightarrow \triangle BAP \text{ vuông cân tại } A$	0.25
		Chứng minh: $BQ \cdot BP = BH \cdot BC = AB^2$ $\Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$	0.25
		Xét $\triangle BHQ$ và $\triangle BPC$ có: $\frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$; $\angle B$ chung $\Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle BPC$ (c.g.c)	0.25
		$\triangle BAP$ vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của tam giác ABC $\Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB} \text{ (2)}$	0.25

	3	$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{HB} \quad (3)$	0.25
		Từ (2) và (3) ta có: $\frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$	0.25
		$\Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$ $\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$	0.25
	1	Chứng minh $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ với x, y là các số dương. Giả sử: $x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 \geq 0$ (luôn đúng với x, y > 0). Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.	0.25
5		Với a, b, c là các số dương và a.b.c = 1. Áp dụng phần a, ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b + c)$ $\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} \quad (1)$	0.25
	2	Tương tự, ta có: $\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)} \quad (2)$ $\frac{1}{a^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{ac(a + b + c)} \quad (3)$ Từ (1); (2); (3), ta có: $\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq$ $\frac{1}{ab(a + b + c)} + \frac{1}{bc(a + b + c)} + \frac{1}{ac(a + b + c)}$	0.25
		$= \frac{a + b + c}{abc(a + b + c)} = \frac{1}{abc} = 1 \quad (\text{do } a.b.c = 1)$ $\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.	0.25