

Bài 1 (2,0 điểm): Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 - x^3y - x + y$;

b) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$.

Bài 2 (3,0 điểm): Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$.

a) Tìm điều kiện của x để M xác định và rút gọn M ;

b) Tìm tất các giá trị của x để $M > 0$.

Bài 3 (3,0 điểm): Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

b) $6^x - 4.3^x - 27.2^x + 108 = 0$

Bài 4 (2,0 điểm):

a) Xác định một đa thức bậc ba $f(x)$ không có hạng tử tự do sao cho:

$$f(x) - f(x-1) = x^2.$$

b) Chứng tỏ rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (với mọi $n \in \mathbf{N}$).

Bài 5 (6,0 điểm):

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD. Chứng minh:

a) Tứ giác BEDF là hình bình hành.

b) $CH.CD = CB.CK$;

c) $AB.AH + AD.AK = AC^2$.

Bài 6 (4,0 điểm):

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4x-1}{x^2+3}$.

b) Cho tam giác ABC, O là điểm thuộc miền trong của tam giác, các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.

Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$.

-----Hết-----

Ghi chú:

- Thí sinh làm bài không được sử dụng tài liệu, không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

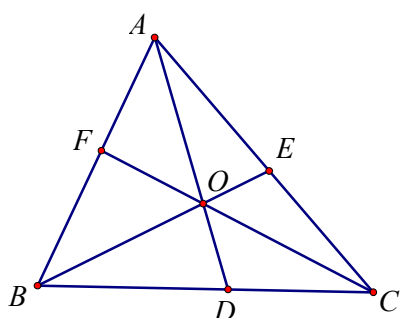
I. Lưu ý chung:

- Giáo viên cần nghiên cứu kĩ hướng dẫn chấm.
- Trong quá trình chấm, cần tôn trọng tính sáng tạo của học sinh. Học sinh có cách diễn đạt, thể hiện khác với đáp án mà vẫn đảm bảo nội dung theo chuẩn kiến thức kĩ năng và năng lực, phẩm chất người học vẫn cho điểm

II. Đáp án – biểu điểm.

Bài	Hướng dẫn	Điểm
Bài 1. (2,0 điểm)	a) $x^4 - x^3y - x + y$ $= x^3(x - y) - (x - y)$ $= (x - y)(x^3 - 1)$	0,5
	$= (x - y)(x - 1)(x^2 + x + 1)$	0,5
	b) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$ $= ab(a - b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c$ $= ab(a - b) - (a^2c - b^2c) + (ac^2 - bc^2)$ $= (a - b)(ab - ca - cb + c^2)$	0,5
	$= (a - b)[a(b - c) - c(b - c)]$ $= (a - b)(b - c)(a - c).$	0,5
Bài 2. (3,0 điểm)	a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa và rút gọn biểu thức M;	0,5
	* Tìm đúng được ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$	
	* Rút gọn được đúng: $M = \frac{1}{2 - x}.$	1,5
	b) Tìm tất cả các giá trị của x để $M > 0$. $M > 0 \Rightarrow \frac{1}{2 - x} > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$	0,75
	Kết hợp ĐKXĐ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$ ta có $M > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2. \end{cases}$	0,25
Bài 3. (3,0 điểm)	a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)^2 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$	0,75
	Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \{1; 2\}.$	

	$b) 6^x - 4 \cdot 3^x - 27 \cdot 2^x + 108 = 0$ $\Leftrightarrow 3^x(2^x - 4) - 27(2^x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow (2^x - 4)(3^x - 27) = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 4 = 0 \\ 3^x - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^2 \\ 3^x = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$ Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \{2; 3\}$.	0,75
Bài 4. (2,0 điểm)	a) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ là đa thức phải xác định. Theo yêu cầu đề bài ta phải có: $ax^3 + bx^2 + cx - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) = x^2$ Hay $3ax^2 - (3a-2b)x + a - b + c = x^2$.	0,5
	Ta có đồng nhất thức này khi và chỉ khi: $\begin{cases} 3a = 1 \\ -3a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$	0,5
	Vậy ta có $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.	
	b) Áp dụng đồng nhất thức ở câu a), thay x lần lượt bằng n số nguyên dương đầu tiên: 1, 2, 3, ..., n-1, n. Ta có: $\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\vdots \\ f(n) - f(n-1) &= n^2 \end{aligned}$	0,5
	Cộng từng vế các đẳng thức trên và nhận xét rằng $f(0) = 0$, ta được: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$	0,5
Bài 5. (6,0 điểm)		
	a) Ta có : $BE \perp AC$ (gt); $DF \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BE \parallel DF$ (1)	0,5
	Chúng minh được: $\triangle BEO = \triangle DFO$ (g - c - g)	0,5

	$\Rightarrow BE = DF$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra BEDF là hình bình hành.	0,5
	b) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{KDC}$	0,5
	Chúng minh được: $\triangle CBH \sim \triangle CDK$ (g.g)	1,0
	$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$	0,5
	c) Chúng minh được: $\triangle AFD \sim \triangle AKC$ (g.g)	0,5
	$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$	0,5
	Chúng minh : $\triangle CFD \sim \triangle AHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$	0,5
	Mà : $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$	0,25
	Suy ra : $AD.AK + AB.AH = AF.AC + CF.AC$ $= (AF + CF)AC = AC^2$	0,25
Bài 6. (3,0 điểm)	a) Nhận thấy $x^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.	
	* Ta có $P = \frac{4x-1}{x^2+3} = \frac{(x^2+3)-(x^2-4x+4)}{x^2+3} = 1 - \frac{(x-2)^2}{x^2+3}$	0,5
	Do $\frac{(x-2)^2}{x^2+3} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $P = 1 - \frac{(x-2)^2}{x^2+3} \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.	0,25
	$P = 1$ khi và chỉ khi $\frac{(x-2)^2}{x^2+3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.	0,25
	Vậy $\max P = 1$ khi $x = 2$.	
	* Ta có	
	$P = \frac{4x-1}{x^2+3} = \frac{-4(x^2+3) + (4x^2+12x+9)}{3(x^2+3)} = -\frac{4}{3} + \frac{(2x+3)^2}{3(x^2+3)}$	0,5
	Do $\frac{(2x+3)^2}{3(x^2+3)} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $P = -\frac{4}{3} + \frac{(2x+3)^2}{3(x^2+3)} \geq -\frac{4}{3} \forall x \in \mathbb{R}$.	0,25
	$P = -\frac{4}{3}$ khi và chỉ khi $\frac{(2x+3)^2}{3(x^2+3)} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.	
	Vậy $\max P = -\frac{4}{3}$ khi $x = -\frac{3}{2}$.	0,25
	b)	
		0,5
	Đặt $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OAC}$, $S_3 = S_{OAB}$.	
	Suy ra $S = S_1 + S_2 + S_3$.	

	Ta có: $\frac{OA}{AD} = \frac{S_3}{S_{ABD}} = \frac{S_2}{S_{ACD}} \Rightarrow \frac{OA}{AD} = \frac{S_3 + S_2}{S_{ABD} + S_{ACD}} = \frac{S_2 + S_3}{S} \quad (1)$	0,5
	Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{OB}{BE} = \frac{S_1 + S_3}{S} \quad (2); \quad \frac{OC}{CF} = \frac{S_1 + S_2}{S} \quad (3)$	0,5
	Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta được: $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{S} = 2.$	0,5