

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO DIỄN CHÂU

**ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 7
NĂM HỌC 2021 - 2022**

Môn: Toán – (Thời gian làm bài 120 phút)

Bài 1:(3,0 điểm)

a) Thực hiện phép tính : $\left[6.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3.\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2$

b) Cho biểu thức: $A = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots + \frac{1}{5^{100}}$

Tính giá trị của biểu thức $B = 6|A| + \frac{1}{5^{100}}$

Bài 2: (6,0 điểm)

a) Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x là số nguyên)

c) Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết rằng hai số $(2n+1)$ và $(3n+1)$ đồng thời là số chính phương

d) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên.}$$

Bài 3: (4,0 điểm)

Ba khối 6, 7, 8 của một trường THCS có tất cả 441 học sinh. Nếu $\frac{1}{3}$ số học sinh khối 6; $\frac{1}{4}$ số học sinh khối 7 và $\frac{1}{5}$ số học sinh khối 8 tham gia dự thi “Đấu trường Toán học VIOEDU” thì số học sinh còn lại của ba khối bằng nhau. Tính số học sinh mỗi khối của trường đó.

Bài 4: (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm của BC . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC có chứa điểm B vẽ đoạn thẳng AK vuông góc với AC và $AK = AC$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Gọi M là giao điểm của AD và KE . Chứng minh rằng:

a) $EC = BK$; b) $\triangle AKE = \triangle CAN$; c) $\frac{AK^2 + ME^2}{KM^2 + AE^2} = 1$

.....HẾT.....

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 7
NĂM HỌC 2021 - 2022**

Bài	câu	Đáp án	Biểu điểm															
1 3đ	a 1đ	Thực hiện phép tính : $\left[6.\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3.\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right]:\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2$																
		$=\left(6.\frac{1}{9}+1+1\right):\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}+2\right):\frac{16}{9}$	0,5															
		$=\frac{8}{3}.\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$	0,5															
	b 2đ	Cho biểu thức: Cho biểu thức: $A=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{5^5}+.....+\frac{1}{5^{100}}$ Tính giá trị của biểu thức $B=6 A +\frac{1}{5^{100}}$																
		$5A=-1+\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+.....+\frac{1}{5^{99}}$	0,5															
		$A+5A=-1+\frac{1}{5^{100}}\Rightarrow A=\frac{1}{6}.\left(-1+\frac{1}{5^{100}}\right)$	0,5															
		$\Rightarrow A<0\Rightarrow A =-\frac{1}{6}\left(-1+\frac{1}{5^{100}}\right)=\frac{1}{6}.\left(1-\frac{1}{5^{100}}\right)$	0,5															
		$B=6. A +\frac{1}{5^{100}}=6.\frac{1}{6}.\left(1-\frac{1}{5^{100}}\right)+\frac{1}{5^{100}}=1$	0,5															
	2 6đ	a 1,5đ	Tìm số nguyên x,y biết: $\frac{5}{x}+\frac{y}{4}=\frac{1}{8}$															
Từ $\frac{5}{x}+\frac{y}{4}=\frac{1}{8}\Rightarrow \frac{5}{x}=\frac{1}{8}-\frac{y}{4}\Rightarrow \frac{5}{x}=\frac{1-2y}{8}$			0,25															
$\Rightarrow x(1-2y)=40$ $\Rightarrow 1-2y\in \text{ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1;\pm 5$			0,5															
Ta có bảng sau: <table><tr><td>$1-2y$</td><td>-5</td><td>-1</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>x</td><td>-8</td><td>-40</td><td>40</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>-2</td></tr></table>			$1-2y$	-5	-1	1	5	x	-8	-40	40	8	y	3	1	0	-2	0,5
$1-2y$			-5	-1	1	5												
x			-8	-40	40	8												
y	3	1	0	-2														
Vậy ta có các cặp số $(x;y)=\left\{(-8;3);(-40;1);(40;0);(8;-2)\right\}$	0,25																	

b 1,5đ	Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x là số nguyên)	
	Ta có : $Q = \frac{27-2x}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$. Do đó Q lớn nhất khi $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất	0,5
	+) Xét $x > 12$ thì $\frac{3}{12-x} < 0$ +) Xét $x < 12$ thì $\frac{3}{12-x} > 0$	0,25
	Vậy để $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất thì $12-x > 0$; x là số nguyên và $12-x$ nhỏ nhất $\Rightarrow 12-x=1 \Rightarrow x=11$ Vậy Q có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$	0,75
c 1,5đ	Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết rằng hai số $(2n+1)$ và $(3n+1)$ đồng thời là số chính phương	
	Vì n là số tự nhiên có hai chữ số nên $10 \leq n \leq 99$. Do đó $21 \leq 2n+1 \leq 199$	0,5
	Mặt khác $2n+1$ là số chính phương lẻ $\Rightarrow (2n+1) \in \{25; 49; 81; 121; 169\}$ $\Rightarrow n \in \{12; 24; 40; 60; 84\}$	0,5
	Do đó , $(3n+1) \in \{37; 73; 121; 181; 253\}$ Trong các số trên chỉ có số $121 = 11^2$ là số chính phương. Vậy số tự nhiên có hai chữ số cần tìm là 40	0,5
d 1,5đ	Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng: $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.	
	S có $(n-1)$ số hạng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $S = n-1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n-1$ (1)	0,5
	Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$	0,5
	$S > n-1 - 1 + \frac{1}{n} = n-2 + \frac{1}{n} > n-2$ (2) Từ (1) và (2) ta có: $n-2 < S < n-1$ Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$	0,5
3 4đ	Ba khối 6, 7, 8 của một trường THCS có tất cả 441 học sinh. Nếu $\frac{1}{3}$ số học sinh khối 6; $\frac{1}{4}$ số học sinh khối 7 và $\frac{1}{5}$ số học sinh khối 8 tham gia	

		dự thi “ Đấu trường Toán học VIOEDU ” thì số học sinh còn lại của ba khối bằng nhau. Tính số học sinh mỗi khối của trường đó.	
		Gọi số học sinh của ba khối 6, 7, 8 của trường đó lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c < 441)$ Theo bài ra ta có: $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c (*) \text{ và } a + b + c = 441$	1,5
		Từ (*) $\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$	1,5
		Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{441}{49} = 9$ Suy ra $a = 162, b = 144, c = 135$ Vậy tổng số học sinh của ba khối 6,7,8 lần lượt là 162,144 và 135.	0,5 0,5
4 7đ		Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC có chứa điểm B vẽ đoạn thẳng AK vuông góc với AC và $AK = AC$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Gọi M là giao điểm của AD và KE. Chứng minh rằng: a) $EC = BK$; b) $\triangle AKE = \triangle CAN$; c) $\frac{AK^2 + ME^2}{KM^2 + AE^2} = 1$	

		1
a 2đ	Xét $\triangle AEC$ và $\triangle ABK$ có : $AE = AB$ (GT) , $AC = AK$ (GT), $EAC = BAK$ (cùng phụ với BAC). Do đó $\triangle AEC = \triangle ABK$ (C- G – C) $\Rightarrow EC = BK$ (2 cạnh tương ứng)	1,5 0,5
b 2đ	Xét $\triangle ADB$ và $\triangle NDC$ có : $DB = DC$ (GT), $DA = DN$ (GT) , $ADB = NDC$ (2 góc đối đỉnh). Do đó $\triangle ADB = \triangle NDC$ (C- G – C)	0,5
	$\Rightarrow ABD = NCD$ (2 góc tương ứng) , mà hai góc này nằm ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CN \Rightarrow BAC + ACN = 180^\circ \Rightarrow ACN = 180^\circ - BAC$ (1)	0,5
	Lại có : $KAE = KAC + BAE - BAC = 180^\circ - BAC$ (2) Từ (1) và (2) ta có $ACN = KAE$	0,5
	Xét $\triangle AKE$ và $\triangle CAN$ có: $AE = CN$ (= AB), $AK = AC$ (GT), $KAE = ACN$ (CMT). Do đó $\triangle AKE = \triangle CAN$ (C-G-C)	0,5
c 2đ	Vì $\triangle AKE = \triangle CAN$ (CMT) $\Rightarrow AKE = CAN$ (hai góc tương ứng), Mà $KAN + CAN = 90^\circ \Rightarrow KAN + AKE = 90^\circ$. Hay $KAM + AKM = 90^\circ$ $\Rightarrow KMA = 90^\circ \Rightarrow AM \perp KE$ tại M	1
	Xét $\triangle AKM$ vuông tại M và $\triangle AEM$ vuông tại M, Áp dụng định lí Py-ta-go ta có $AK^2 - KM^2 = AE^2 - ME^2$ (= AM^2) $\Rightarrow AK^2 + ME^2 = AE^2 + KM^2 \Rightarrow \frac{AK^2 + ME^2}{KM^2 + AE^2} = 1$	1

Chú ý : 1. Bài 4 học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai thì không chấm
2. Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa tương ứng