

Bài 1. (4,0 điểm)

1. Cho $P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{2021}(1+2+3+\dots+2021)$. Chứng minh rằng $P > 10^6$.
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Cho $M = \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{2022}{2021^3}$. Chứng minh rằng $M > \frac{505}{1011}$.
2. Để phòng chống dịch bệnh Covid-19, trường A mua một số khẩu trang y tế để chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C. Lúc đầu số khẩu trang dự định chia cho ba lớp theo tỉ lệ 5:6:7, nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 khẩu trang. Tính tổng số khẩu trang mà trường A đã mua và tính số khẩu trang thực tế 3 lớp đã nhận.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn: $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c}$.
Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N = |x-2020| + |x-2021| + |x-2022|$.

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC, điểm E nằm giữa M và C. Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AE (H, K thuộc AE).

1. Chứng minh $HB = AK$.
2. Tính $\widehat{MHK}$.
3. Đường thẳng AM cắt các đường thẳng BH và CK tại O và F.
Chứng minh $OE \perp EF$.

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$, tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D. Chứng minh rằng $AD + BD = BC$.

----- HẾT -----